Le théorème de Thalès et sa réciproque.

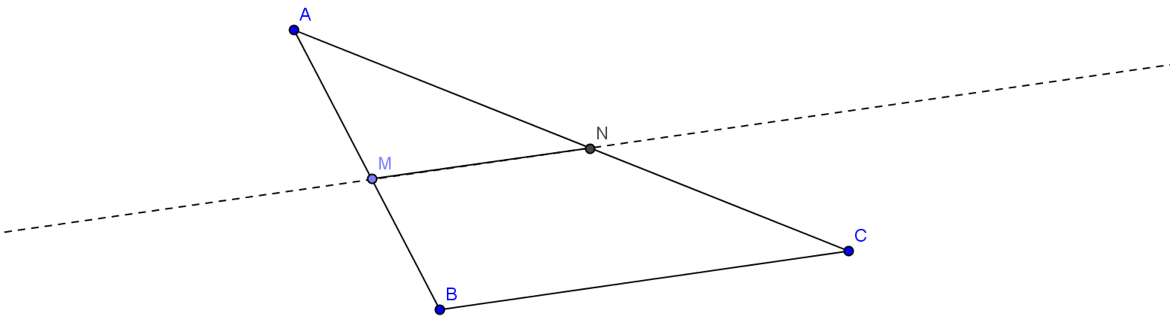
Le théorème de Thalès.

1. **Première configuration : Voir classe de 4ème. Proportionnalité dans le rectangle.**

Soit ABC un triangle et un point M de [AB], un point N de [AC] tel que (MN)//(BC)

Dans ces conditions : le petit triangle AMN est une réduction à une certaine échelle du grand triangle ABC

Les longueurs à mettre en relation sont:
AM et AB
AN et AC
MN et BC



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Premier point de la démonstration :

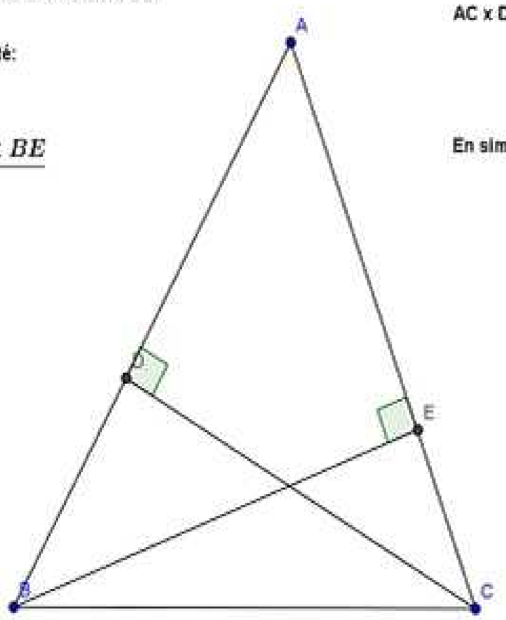
On peut exprimer l'aire du triangle ABC:

Soit en utilisant la base AB et la hauteur CD

Soit en utilisant la base AC et la hauteur BE.

Cela donne comme égalité:

$$\frac{AB\times DC}{2}=\frac{AC\times BE}{2}$$



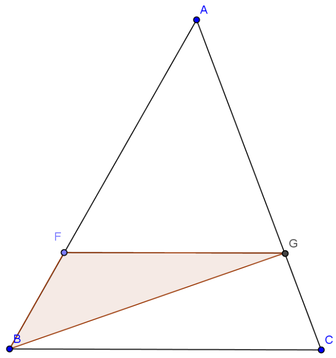
En multipliant chaque terme par 2 : $AB\times DC = AC\times BE$

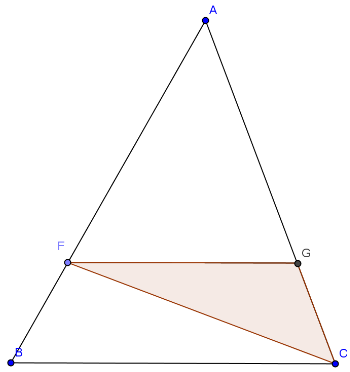
Endivisant chaque membre par AC x DC: $$\frac{AB\times DC}{AC\times DC}=\frac{AC\times BE}{AC\times DC}$$

En simplifiant de part et d'autre: $$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{BC}$$

Second point :

Comme les deux triangles colorés ont la base FG en commun et ont relativement à cette base la même hauteur, ils ont la même aire.





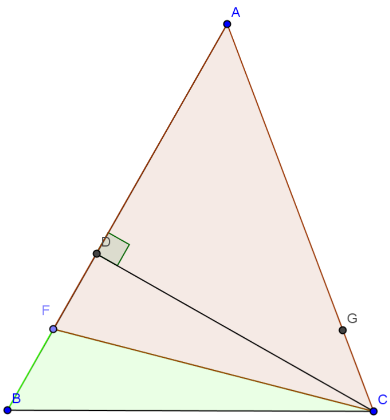
Donc : Aire (trapèze FGCB)-Aire (triangle FGB) =Aire trapèze – aire (FGC)

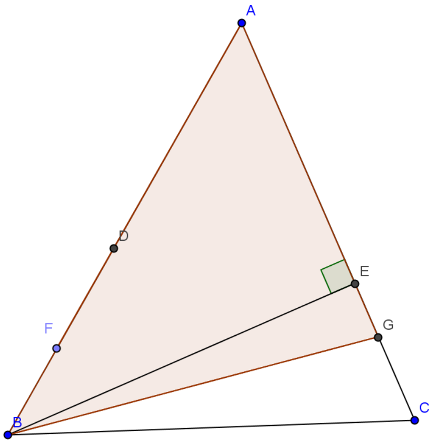
Conclusion : Aire BGC = Aire FBC.

Donc : Aire (ABC) – Aire (BGC) = Aire (ABC) –Aire (FBC)

Aire (AGB) = Aire (AFC)

Troisième point : En exprimant les aires de ces triangles avec respectivement les bases et hauteurs AB et DC pour AGB et AC et BE pour AFC :



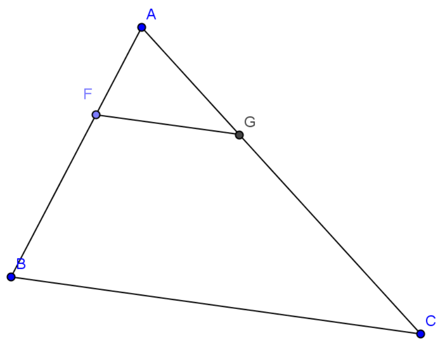


$$\frac{AF \times DC}{2} = \frac{AG \times BE}{2} \Rightarrow AF \times DC = AG \times BE \Rightarrow \frac{AF \times DC}{AG \times DC} = \frac{AG \times BE}{AG \times DC}$$

Soit en conclusion : $\boxed{\frac{AF}{AG} = \frac{BE}{DC}}$

Or, on a aussi, d'après notre premier point, que : $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{BC}$.

Conclusion : $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AG} \Rightarrow \frac{AB}{AC} \times \frac{AG}{AB} = \frac{AF}{AG} \times \frac{AG}{AB} \Rightarrow \frac{AG}{AC} = \frac{AF}{AB}$

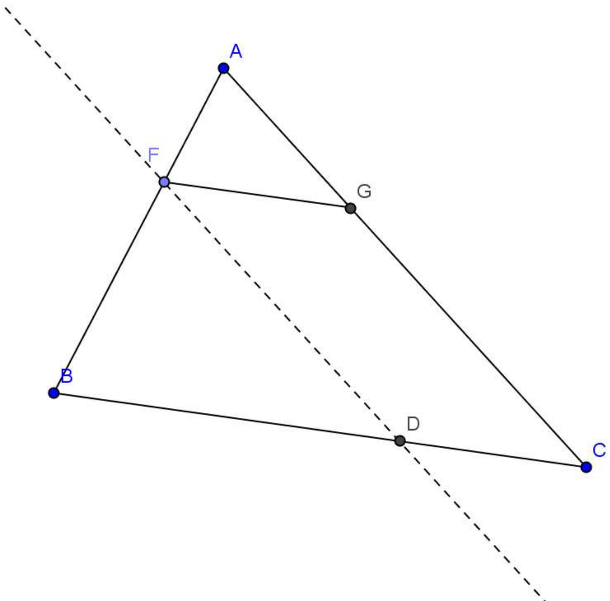


On vient bien de démontrer que, si (FG) // (BC) :

$$\frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AG}}{\mathbf{AC}}$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que le quotient $\frac{FG}{BC}$ est aussi égal au deux précédents.

Quatrième point :



Faisons intervenir la parallèle à (AC) en F.

Elle coupe [BC] en D.

On a donc :

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} \, donc \, \frac{BC - DC}{BC} = \frac{BA - FA}{BA}$$

$$\frac{BC}{BC} - \frac{DC}{BC} = \frac{BA}{BA} - \frac{FA}{BA}$$

$$1 - \frac{DC}{BC} = 1 - \frac{FA}{BA}$$

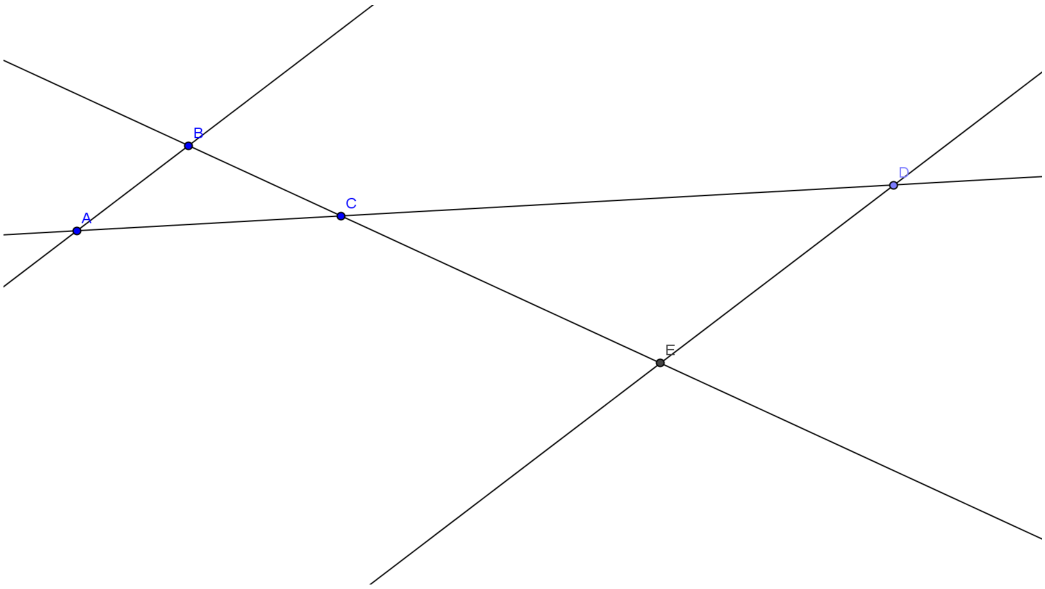
$$\frac{DC}{BC} = \frac{FA}{BA}$$

Mais (FG) // (DC) et (FD) // (GC) : le quadrilatère FGCD est donc un parallélogramme : FG = DC.

Conclusion : En remplaçant DC par FG dans la dernière égalité, il vient : $\boxed{\frac{FG}{BC} = \frac{FA}{BA}}$

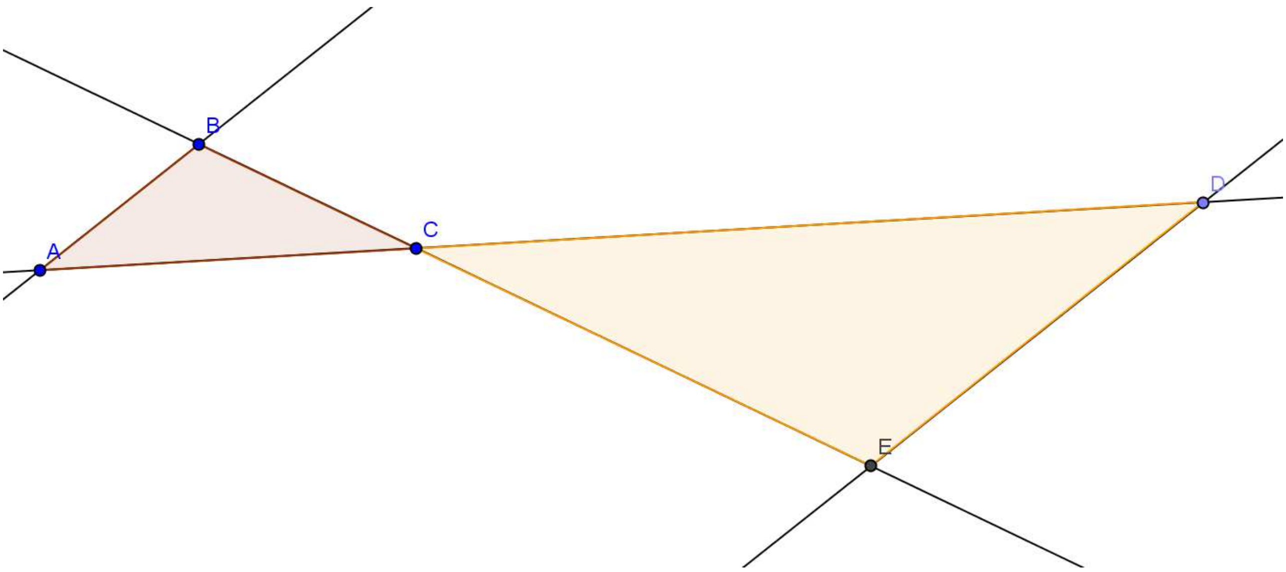
Conclusion : on a bien $\boxed{\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{FG}{BC}}$

2. Seconde configuration :



Dans cette configuration : (BE) et (AD) sont deux droites sécantes en C et les droites (AB) et (ED) sont parallèles.

Les deux triangles de travail sont les triangles CBA et CDE, qui, comme dans la première configuration, sont dans un rapport d’échelle.



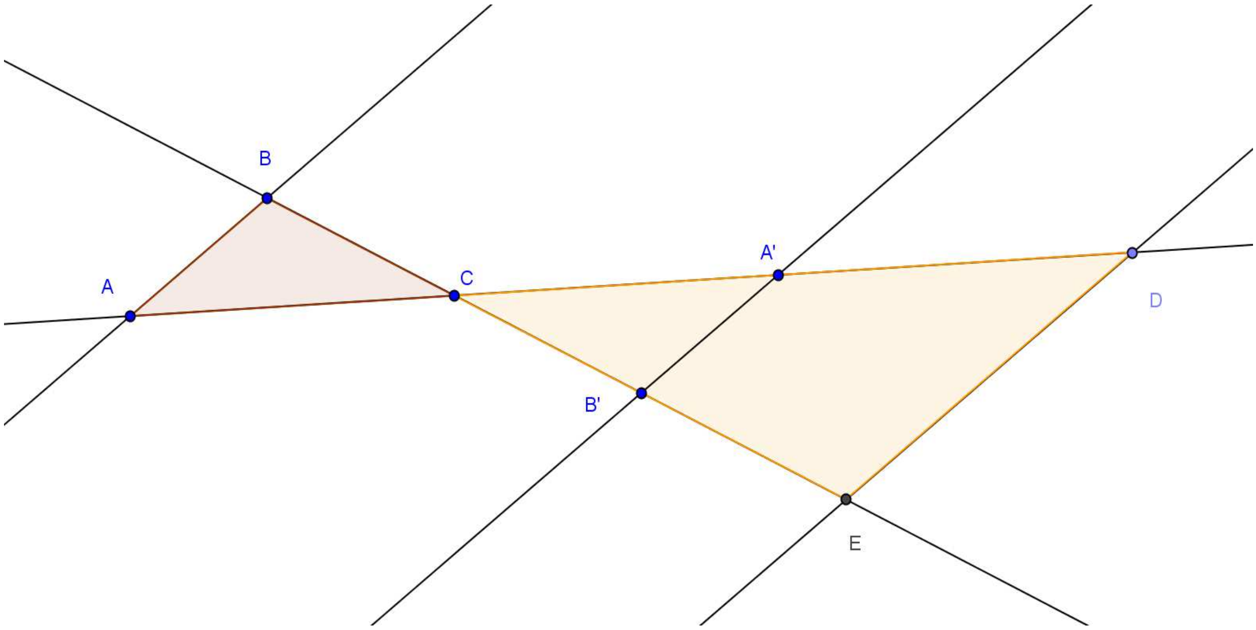
Attention à ne pas confondre les côtés dans le même rapport d’échelle !

CB est en relation avec CE
CA est en relation avec CD
AB est en relation avec ED

Les trois quotients égaux sont: $\frac{CB}{CE} = \frac{CA}{CD} = \frac{BA}{ED}$

Démonstration :

Il suffit de faire intervenir les symétriques de A et B par rapport à C, respectivement A’ et B’.



Comme C est le centre de symétrie, C est le milieu des segments [BB’] et [AA’].
En conséquence, ABA’B’ est un parallélogramme.

On a donc (AB)//(A’B’)

Or ; par hypothèse, (AB) // (DE). Les droites (A’B’) et (DE) sont toutes deux parallèles à une même troisième droite, elles sont donc parallèles.

On peut donc appliquer la propriété démontrée dans la première configuration aux deux triangles emboîtés l’un dans l’autre, les triangles CA’B’ et CDE, qui ont comme sommet commun C.

$$\boxed{\frac{CB'}{CE}=\frac{CA'}{CD}=\frac{B'A'}{ED}} \quad (1)$$

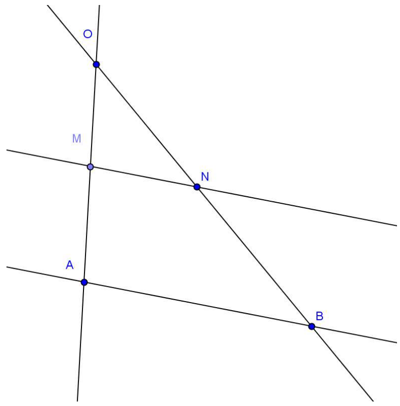
Mais on sait que la symétrie conserve les longueurs : $CB'=CB$ $\quad CA'=CA \quad B'A'=BA$.

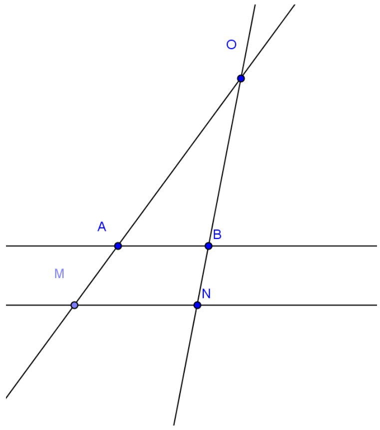
De l’égalité (1) on tire donc : $\boxed{\frac{CB}{CE}=\frac{CA}{CD}=\frac{BA}{ED}}$ C.Q.F.D.

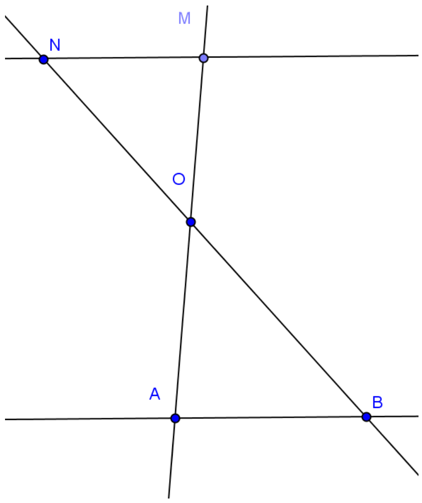
3. Enoncé du théorème de Thalès :

Soit (d) et(d’) deux droites sécantes en O.
Si A et M, deux points de (d) et B et N, deux points de (d’), sont tels que (AB) // (MN) :

Alors $$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN}$$





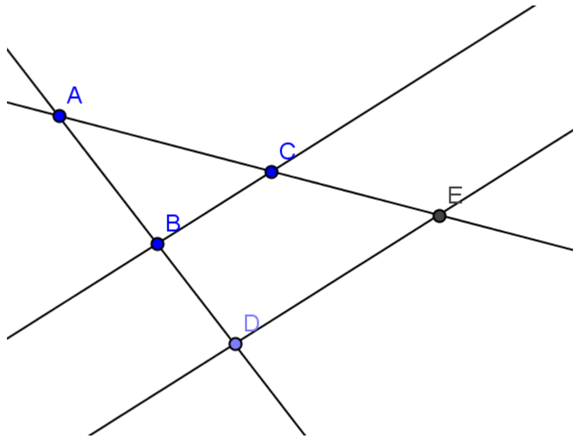


Pour ne pas se tromper dans l’application littérale de cette égalité :

- **Bien identifier les 2 triangles et commencer par le sommet commun à ces deux triangles.**
- **Mettre en numérateur les longueurs d’un triangle.**
- **Mettre en dénominateur les longueurs de l’autre.**

4. Exercices configuration N°1 :

a) **Sans piège : application directe.**



Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

AB = 3,8 cm BC = 2,4cm

AE = 7,2 cm DE = 3,6 cm.

Calculer AD et AC.

Etape N°1 : appliquer son cours littéralement en justifiant sa méthode.

Les droites (BC) et (DE) sont parallèles : d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Etape N°2 : Remplacer les longueurs connues par leur valeur.

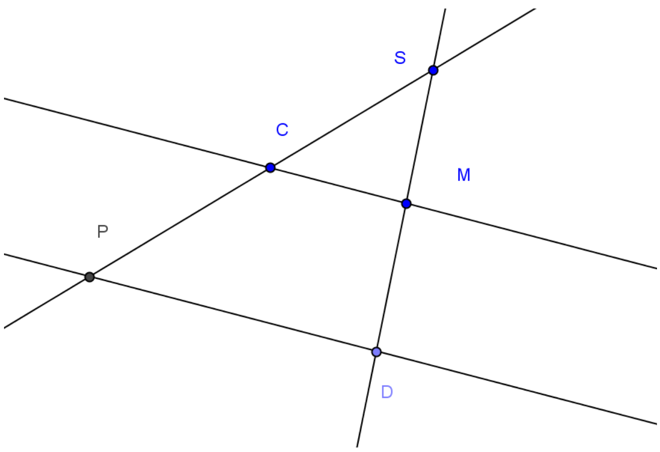
$$\frac{3.8}{AD} = \frac{AC}{7{,}2} = \frac{2{,}4}{3{,}6}$$

Etape N°3 : Calculer AD et AC par des produits en croix.

Il est préférable d'utiliser deux fois de suite le quotient $\frac{2{,}4}{3{,}6}$ qui est issu de l'énoncé plutôt que d'utiliser la valeur que vous calculez en 1^{er}.

$$\frac{3.8}{AD} = \frac{AC}{7{,}2} = \frac{2{,}4}{3{,}6} \Rightarrow AD = \frac{3{,}8 \times 3{,}6}{2{,}4} = 5{,}7cm \text{ et } AC = \frac{7{,}2 \times 2{,}4}{3{,}6} = 4{,}8cm$$

b) **Avec piège : Une longueur n'est pas une de celles intervenant dans la triple égalité.**



Les droites (CM) et (DP) sont parallèles.

SC = 6,5 cm PC= 9,1 cm

CM = 2,5 cm SD = 19,2 cm.

Calculons SM et PD.

Etape N°1:

Comme les droites (CM) et (DP) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès : $\frac{SC}{SP} = \frac{SM}{SD} = \frac{CM}{PD}$

Etape N°2 : Etape intermédiaire : Attention : un calcul intermédiaire s'impose pour calculer SP

Comme $C \in [PS]$: $SP = PC + CS = 9{,}1 + 6{,}5 = 15{,}6cm$

On a donc : $\dfrac{6{,}5}{15{,}6} = \dfrac{SM}{19{,}2} = \dfrac{2{,}5}{6}$

Etape N°3 : $SM = \dfrac{6{,}5 \times 19{,}2}{15{,}6} = 8cm.et.DP = \dfrac{15{,}6 \times 2{,}5}{6{,}5} = 6cm.$

Exercice N°3 : Couplage avec d'autres cours : Pythagore, fonctions, équations…

MNP est un triangle tel que MN = 58 cm MP = 40 cm NP = 42 cm.

a) MNP est-il un triangle rectangle ? Justifier.

b) S est un point quelconque de [PM]. On note par x la longueur MS, en cm. $x = MS$.

Entre quelles valeurs varie x ?

c) La parallèle à (PN) passant par S coupe [MN] en T. Exprimer les longueurs TS et MT en fonction de x.

d) Quelle doit être la valeur de x pour avoir MT = 31,9 cm ?

e) Quelle est la nature du triangle MTS ? Justifier.

f) On note par f la fonction de variable x telle que : $f(x)$ soit égale au périmètre du triangle MTS.

Définir algébriquement la fonction f.

g) Pour quelle valeur de x ce périmètre vaut-il le cinquième du périmètre du triangle MPN ?

h) On note par g la fonction de variable x telle que $g(x)$ soit égale à l'aire du triangle MTS.

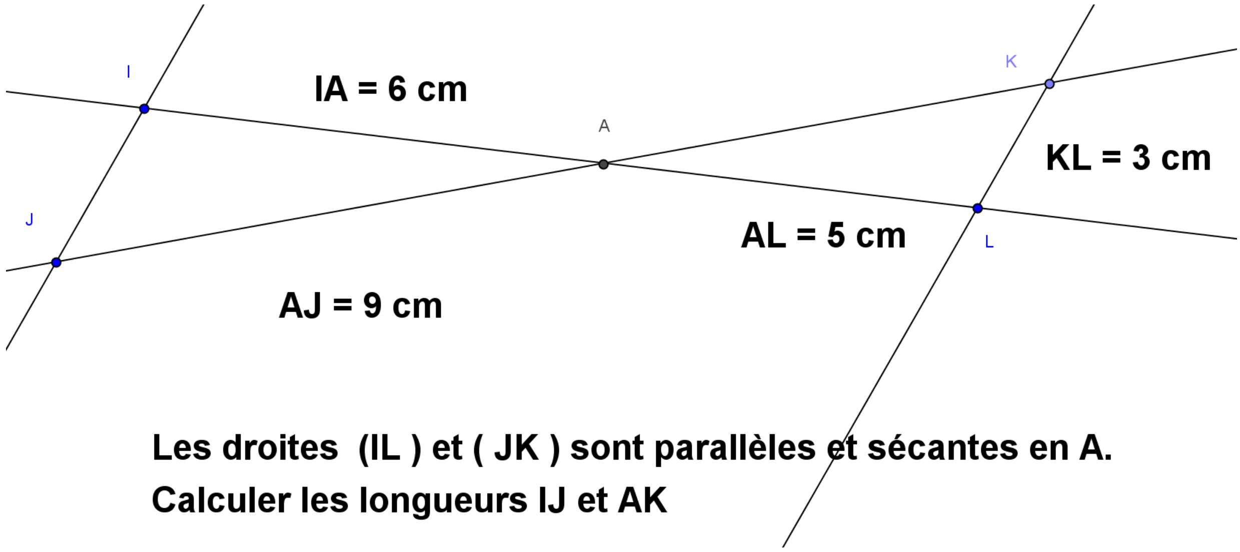
Définir algébriquement la fonction g.

i) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MTS vaut-elle 67,2 cm² ?

j) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MTS vaut-elle le tiers de celle du triangle MPN ? (Valeur au mm près.)

5. Exercices configuration n°2 :

a) Sans piège : application directe.

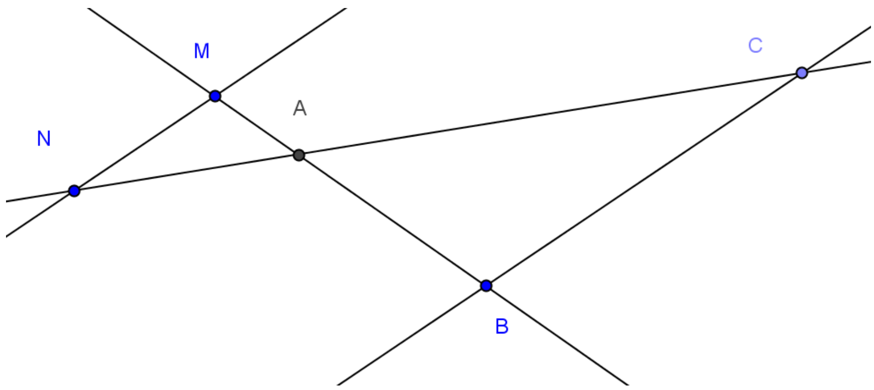


Les droites (IL) et (JK) sont parallèles et sécantes en A.
Calculer les longueurs IJ et AK

Les droites (IL) et (KJ) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{AI}{AL}=\frac{AJ}{AK}=\frac{IJ}{LK}. \qquad \text{Donc } \frac{6}{5}=\frac{9}{AK}=\frac{IJ}{3}\Rightarrow AK=\frac{5\times 9}{6}=7{,}5cm \text{ et } IJ=\frac{3\times 6}{5}=3{,}6cm.$$

b) Avec un calcul de longueur (soustraction) en étape intermédiaire:



Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne : MA = 5,4   MB = 14,4   NA = 7,5. Calculer AC.

Comme les droites (MN) et (BC) sont parallèles, d'après Thalès:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}.$$

Aucune information ni sur MN, ni sur BC. Peu importe…

$$\frac{5{,}4}{AB}=\frac{7{,}5}{AC}$$

Attention : l'énoncé ne donne pas AB. Mais…

Comme $A\in[MB]: MA+AB=MB\Rightarrow 5{,}4+AB=14{,}4\Rightarrow AB=14{,}4-5{,}4=9$

Donc : $\frac{5{,}4}{9}=\frac{7{,}5}{AC}\Rightarrow AC=\frac{9\times 7{,}5}{5{,}4}=12{,}5$

Réciproque du théorème de Thalès.

1) La réciproque :

a) Rappel sur une proposition réciproque :

Les théorèmes de mathématiques sont structurés de la manière suivante :

Si une proposition A est vraie, alors une proposition B l'est aussi :

Exemples :

- *Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse vaut la somme des carrés des côtés formant l'angle droit.*

- *Soit n un nombre entier naturel : si n est pair, alors son carré l'est aussi.*

  (Démonstration : si n est un entier naturel pair, alors il existe k entier naturel tel que n =2k. Alors $n^2=(2k)^2=2\times 2k^2$ *. Il suffit de poser* $K=2k^2$ *et on a* $n^2=2K$ *. Conclusion : il existe un entier naturel K tel que* $n^2=2K$*.* n^2 *est donc pair.)*

- *Soit n et p deux nombres entiers naturels : si n et p sont pairs, alors leur somme est aussi paire.*

  (Soit n et p deux nombres entiers naturels. Si n et p sont pairs, il existe k et t, nombres entiers naturels, tels que : n = 2k et p = 2t. n + p = 2k + 2t = 2 (k+t)
  n +p est bien un multiple de 2.)

La réciproque consiste à inverser l'ordre des propositions.

Réciproques des propositions ci-dessus.

- *Si le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres, alors le triangle est rectangle.*

- *Soit n un nombre entier naturel. Si* n^2 *est pair, alors n est pair.*

- *Soit deux nombres entiers naturels n et p : si n+p est pair, alors n et p le sont aussi.*

Valeur de vérité d'une réciproque : Attention. Si une proposition de départ est vraie, sa réciproque ne l'est pas obligatoirement !

Valeur de vérité des réciproques ci-dessus.

- *La* $1^{ère}$ *est vraie : on l'utilise pour justifier qu'un triangle est rectangle à partir de la connaissance des longueurs des trois côtés.*

- *La seconde est vraie : sa démonstration est plus facile si on passe par la contraposée…(Voir la suite…)*

- *La troisième est fausse : 3+9 = 12 est pair alors que 3 et 9 sont impairs.*

b) **Réciproque de Thalès.**

Comme le théorème de Thalès est ainsi structuré : *« Si des droites sont parallèles, alors des quotients de longueurs de segment sont égaux ».*

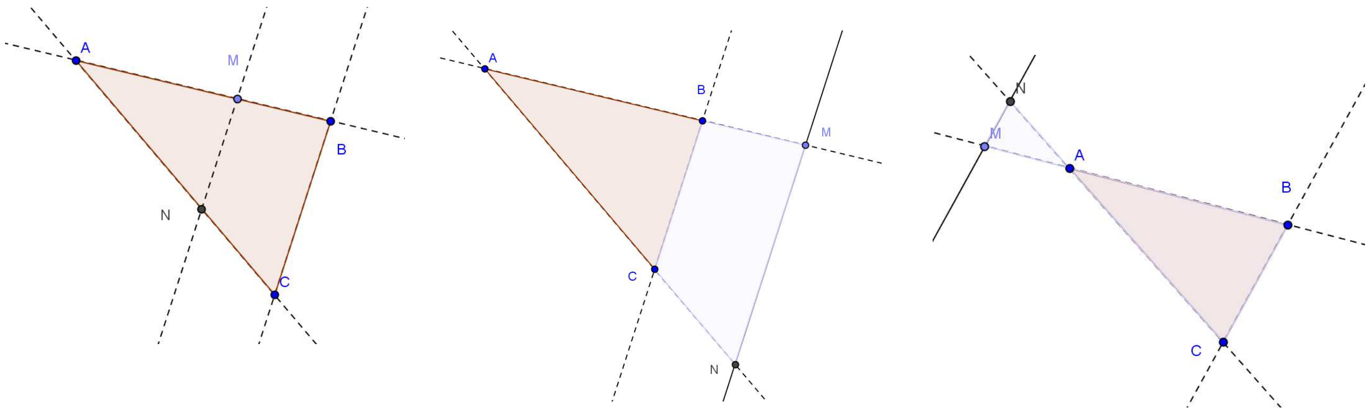
Sa réciproque ne peut être que de la forme : *« Si des quotients de longueurs de segment sont égaux, alors des droites sont parallèles. »*

ON VOIT DE SUITE QUE CETTE RECIPROQUE EST UTILISEE POUR JUSTIFIER DU PARALLELISME A PARTIR DE LONGEURS DE SEGMENT.

Enoncé de la réciproque du théorème de Thalès :

Soit ABC un triangle :

Si A, B et M et A, C et N sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ **, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.**



Démonstration : nous admettrons cette propriété.

Attention à l'ordre des points qui doit être le même dans les alignements.

2) **Que se passe-t-il si les quotients sont différents ? La contraposée du théorème de Thalès.**

Soit ABC un triangle :

Si A, B et M et A, C et N sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$**, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.**

3) Comparer des quotients:

On remarque donc que conclure avec la réciproque de Thalès ou sa contraposée passe par savoir comparer des quotients. Pour cela :

- On peut comparer leurs écritures décimales si elles existent.
- On peut les mettre au même dénominateur pour ensuite compare leur numérateur.
- On peut comparer leurs écritures irréductibles.
- On peut comparer leur produit en croix.
- On peut comparer leur valeur approchée mais attention ! Si elles sont différentes à partir d'un rang donné, les quotients sont différents. En revanche, en cas d'égalité de valeurs approchées, surtout ne pas conclure à l'égalité des quotients.

Exemples :

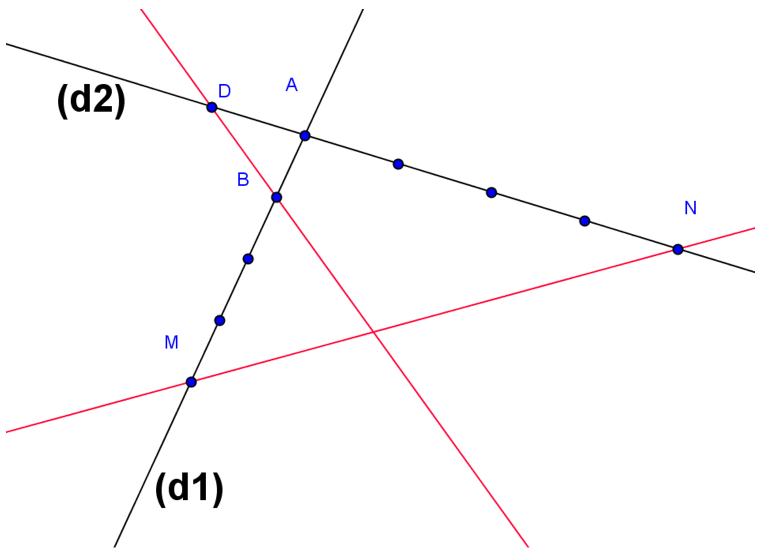
Comparer $\frac{1,25}{7,5}\ et\ \frac{0,5}{3}$ $\frac{1,25}{7,5}=\frac{1}{6}$ et $\frac{0,5}{3}=\frac{1}{6}$ Conclusion : $\frac{1,25}{7,5}=\frac{0,5}{3}$

Comparer $\frac{8}{13}\ et\ \frac{17}{27}$ $\begin{cases} 8\times 27=216 \\ et \\ 13\times 17=212 \end{cases}$ Comme $216\neq 212$, $\frac{8}{13}\neq\frac{17}{27}$

Comparer $\frac{27}{48}$ et $\frac{53}{97}$ $\frac{27}{48}=\frac{27\times 97}{48\times 97}=\frac{2619}{4656}$ et $\frac{53}{97}=\frac{53\times 48}{97\times 48}=\frac{2544}{4656}$.

Les dénominateurs étant égaux, il suffit de comparer les numérateurs (Observez que les deux numérateurs sont les produits en croix de la méthode précédentes).

4) Importance des alignements semblables:



Sur cette figure :

(d1) et (d2) sont sécantes en A.

Les points A, D et N sont alignés, de-même que les points A, B et N.

On a : $\frac{AD}{AN}=\frac{1}{4}$ et $\frac{AB}{AM}=\frac{1}{4}$. Pour autant, les droites (DB) et (NM) ne sont pas parallèles.

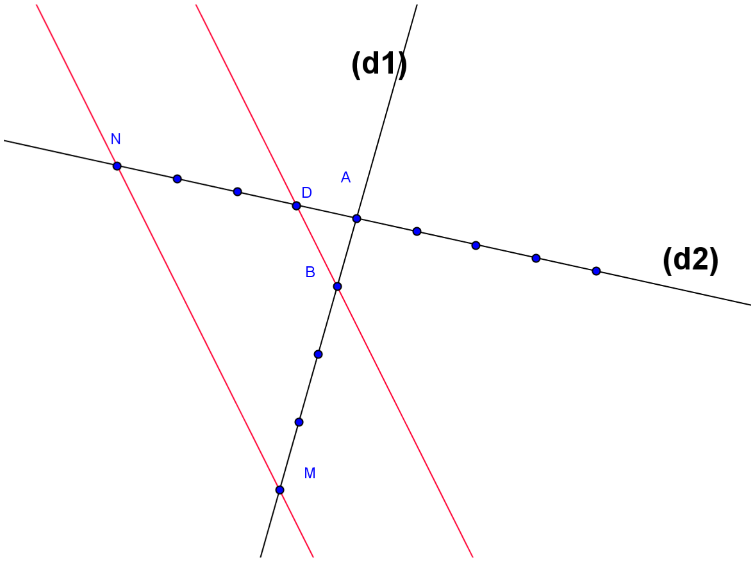
Pourquoi ?

Sur (d2) : D est 1^{er}, A second et N $3^{ème}$.

Sur (d1) : A est 1er, B second et N est 3ème.

A, D, N et A, B, M sont alignés mais pas dans le même ordre. Malgré des quotients égaux, (DB) et (NM) ne sont pas parallèles.

En revanche, ici, les alignements sont les mêmes :



Sur (d1) : De A vers D vers N
Sur (d2) : de A vers B vers M

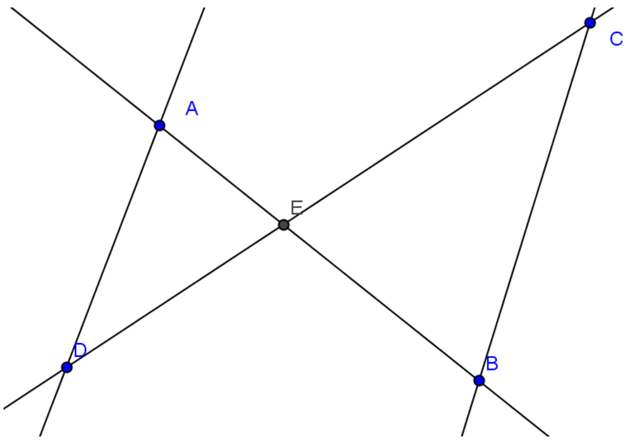
On a aussi $\frac{AD}{AN} = \frac{1}{4}$ et $\frac{AB}{AM} = \frac{1}{4}$.

A, D, N et A, B, M sont alignés dans le même ordre. Les quotients $\frac{AD}{AN}$ et $\frac{AB}{AM}$ sont égaux.

Là, les droites (DB) et (NM) sont parallèles.

5) Des exemples d'exercices.

- **Exercice n°1** :



(DC) et (AB) sont sécantes en E.

AE = 2,4 cm EB = 4 cm

DE = 4 cm EC = 6 cm.

Les droites (AD) et (CB) sont-elles parallèles ?

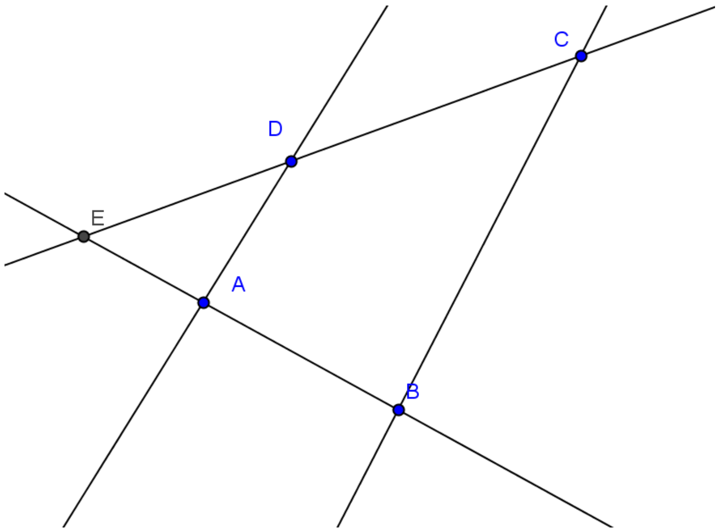
$$\frac{EA}{EB} = \frac{2,4}{3,6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{ED}{EC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Les points A, E, B et D, E, C sont alignés dans le même ordre et $\frac{EA}{EB} = \frac{ED}{EC}$. **D'après la réciproque** du théorème de Thalès, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

- **<u>Exercice n°2 :</u>**

(DC) et (AB) sont sécantes en E.



EA = 1,9 cm EB = 2,9 cm

ED = 2,8 cm DC = 1,4 cm.

Les droites (AD) et (CB) sont-elles parallèles ?

$$\frac{EA}{EB}=\frac{1{,}9}{2{,}9}=\frac{19}{29}$$

Comme $D\in[EC]$: $EC = ED + DC = 2{,}8 + 1{,}4 = 4{,}2cm$

$$\frac{ED}{EC}=\frac{2{,}8}{4{,}2}=\frac{28}{42}=\frac{2}{3}$$

Comparaison des fractions par mise au dénominateur commun :

$\frac{EA}{EB}=\frac{19}{29}=\frac{19\times 3}{29\times 3}=\frac{57}{87}$ et $\frac{ED}{EC}=\frac{2}{3}=\frac{2\times 29}{3\times 29}=\frac{58}{87}$: on en déduit que $\frac{EA}{EB}\neq\frac{ED}{EC}$.

Les points A, E, B et D, E, C sont alignés dans le même ordre et $\frac{EA}{EB}\neq\frac{ED}{EC}$: **d'après la contraposée** du théorème de Thalès, les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles.

Petite remarque sur la contraposée : Tu verras peut-être plus tard dans ta carrière de mathématicien la définition de la contraposée. En gros :

Considérons un enchainement logique : Si P est vrai, alors Q est vrai.
Sa contraposée est : Si Q est faux, alors P est faux.

L'intérêt réside dans l'équivalence des deux :
Il peut parfois être délicat de démontrer une proposition directe. Mais si on arrive facilement à démontrer sa contraposée, cela valide automatiquement la proposition directe.

Exemple :
Pour démontrer : si n² est pair, alors n est pair. (1)
On peut passer par sa contraposée qui est : si n est impair, alors n² est impair. (2)

Démontrer (2) revient à démontrer (1) :

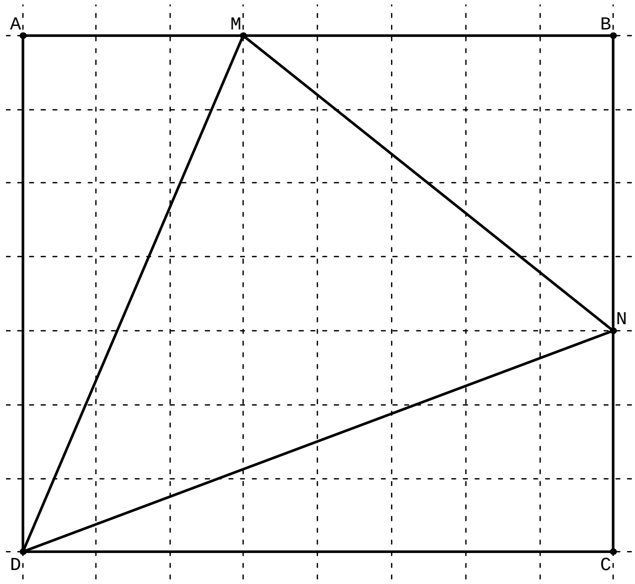
Si n est impair : n s'écrit sous la forme $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+2k+1 = 2(2k^2+k)+1$

Soit $k' = 2k^2+k$ *. On a alors :* $n^2 = 2k'+1$ *qui est l'écriture d'un nombre impair. Conclusion : (2) est vrai. Donc (1) l'est aussi.*

Construire un point en respectant des proportions .

(Pas au programme de collège mais toujours bon à connaître)

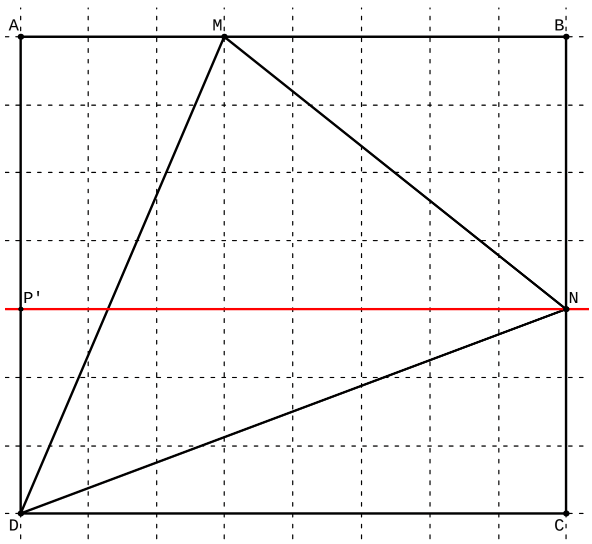
1) Exemple 1 :



- Cherchons un point P du segment [DM] tel que $\frac{DP}{DM} = \frac{3}{7}$

  Pour cela : il faut trouver un triangle qui a pour côté [DM] et dont un autre côté ayant aussi pour extrémité le point D soit découpé en 7 parties de même taille.

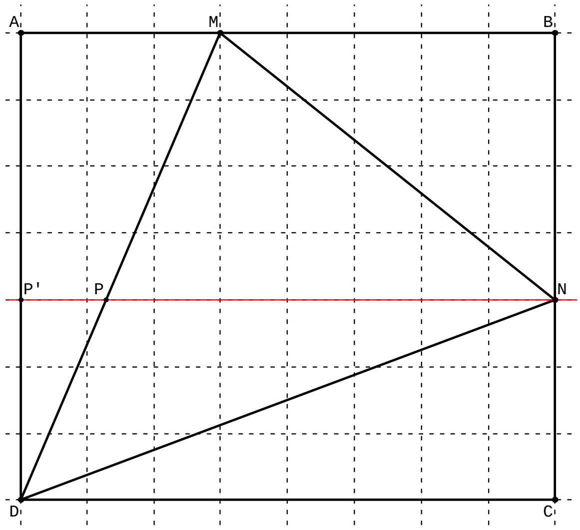
  C'est le cas du côté [DA] dans le triangle DAM.



Il suffit donc de trouver un point P' sur [DA] tel que la proportion $\frac{DP'}{DA} = \frac{3}{7}$ et de suivre le quadrillage qui fait apparaître des parallèles à tous les étages pour trouver le point P demandé.

SP' = 3 unités
DA = 7 unités.

$\frac{SP'}{SD} = \frac{3}{7}$



La droite rouge est parallèle à [AM]

D'après Thalès, le point d'intersection de cette droite rouge avec [DM] sera telle que la proportion de sa longueur rapportée à DM sera aussi de $\frac{3}{7}$.

Le point P est donc l'intersection de la droite rouge et de [DM].

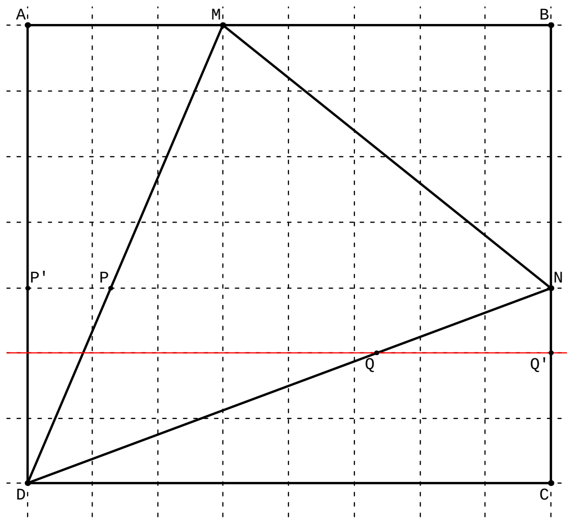
- Cherchons $Q \in [ND] / \frac{NQ}{ND} = \frac{1}{3}$

  Triangle NDQ : son côté NC est partagé en trois.

  On trouve Q' sur NC tel que $\frac{NQ'}{NC} = \frac{1}{3}$

  En s'aidant du quadrillage, on suit la parallèle à [DC] passant par Q'. Elle coupe [ND] en Q.

  Comme (DC)//(QQ'), d'après Thalès : $\frac{NQ}{ND} = \frac{NQ'}{NC} = \frac{1}{3}$



- La méthode consiste donc simplement à trouver une figure de Thalès qui répond à la proportion imposée.

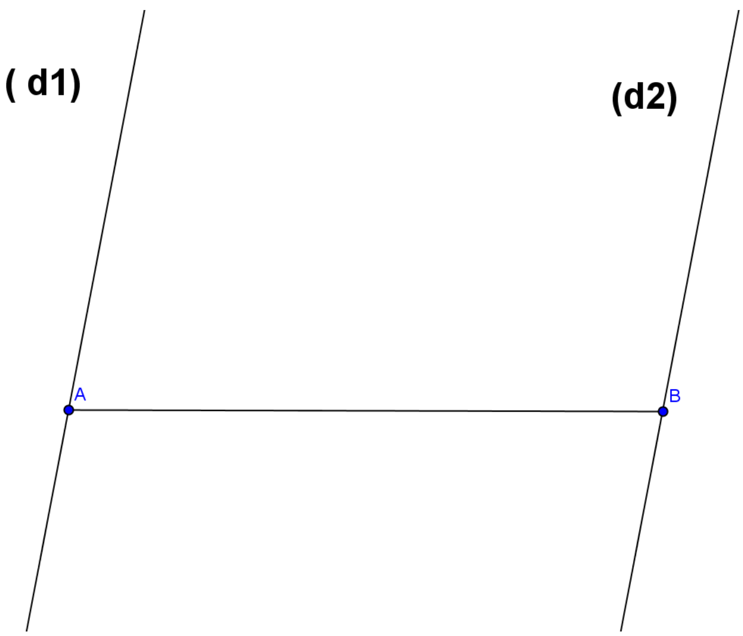
2) Recherche d'un point d'une droite

Exemple : soit un segment [AB]. Cherchons un point M du segment [AB] tel que $\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}$, avec a et b nombre entier. On supposera a < b.

Là-aussi, l'objectif est de construire une figure dans laquelle apparaisse Thalès.

M doit donc être le sommet commun à 2 triangles, l'un doit avoir MA pour côté et l'autre MB pour côté, et par A et B doivent passer deux droites parallèles.

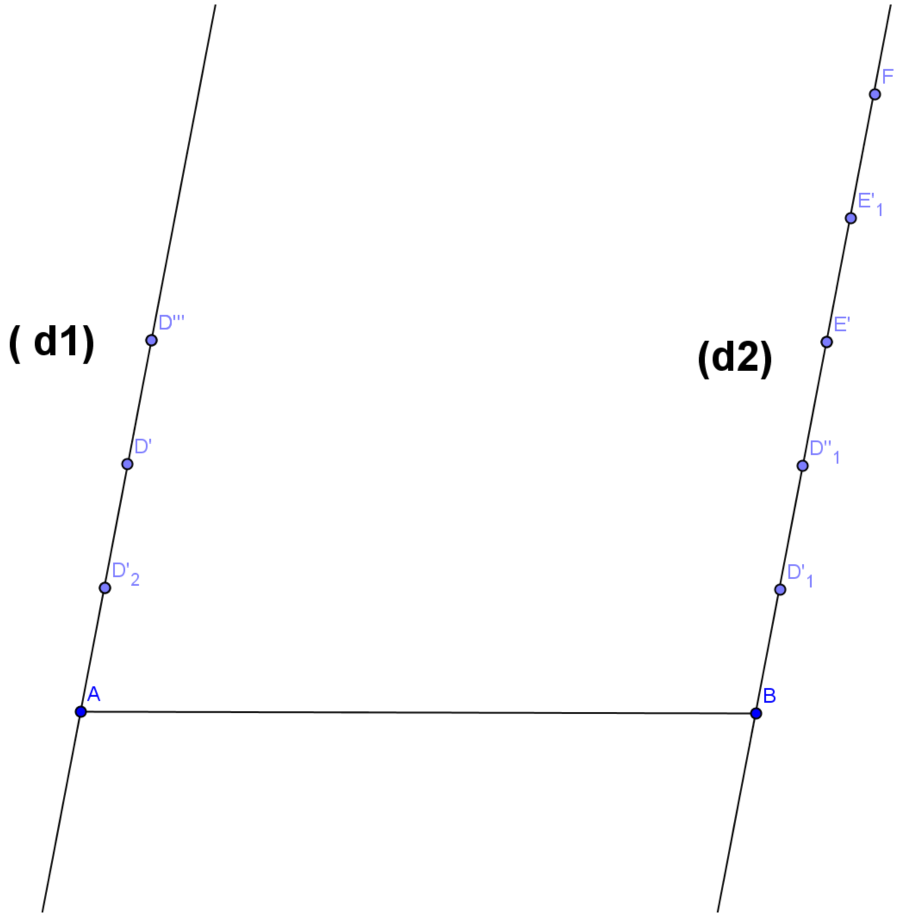
a. Première étape : construire les deux parallèles.



b. <u>Deuxième étape</u> : Comme on veut $\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}$, on va construire un point P sur (d1) et un point T sur (d2) tel que :

AP = a unités
BT = b unités.

Dans notre exemple, nous prendrons $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$.

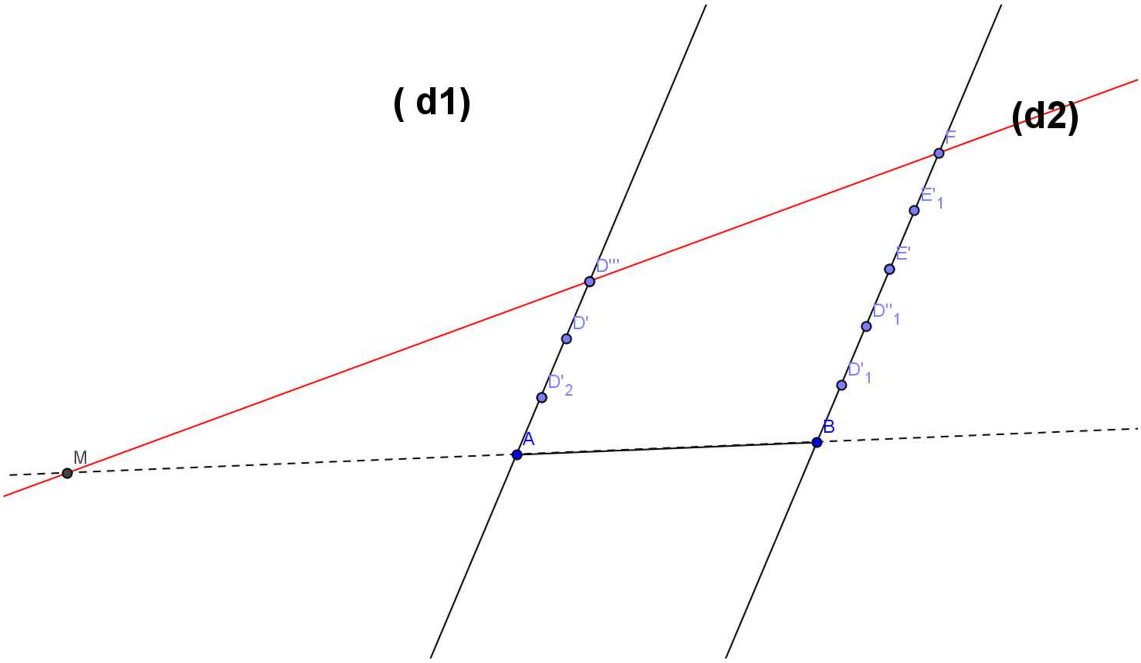


Pour cela, il suffira de prendre un écart de compas quelconque et de la reporter successivement sur (d1) à partir de A et sur (d2) à partir de B.

On a bien $\frac{AD'''}{BF} = \frac{3}{5}$ par construction.

c. <u>Troisième étape : construction de M</u> :

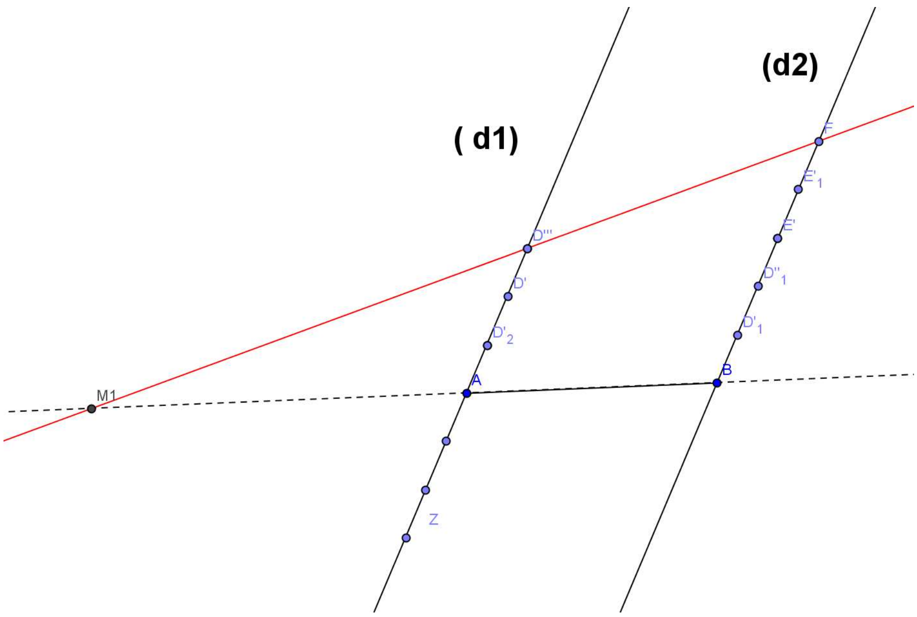
Il n'y a plus qu'à tracer la droite (FD''') Elle coupe la droite (AB) en un point qui ne peut être que M.



Comme (d1)//(df2), d'après Thalès, on a : $\frac{MA}{MB} = \frac{AD'''}{BF} = \frac{3}{5}$

d. <u>Mais comme dans Thalès il y a deux configurations, il y a une deuxième solution à notre problème</u>.

Graduons (d1) sur l'autre demi-droite :



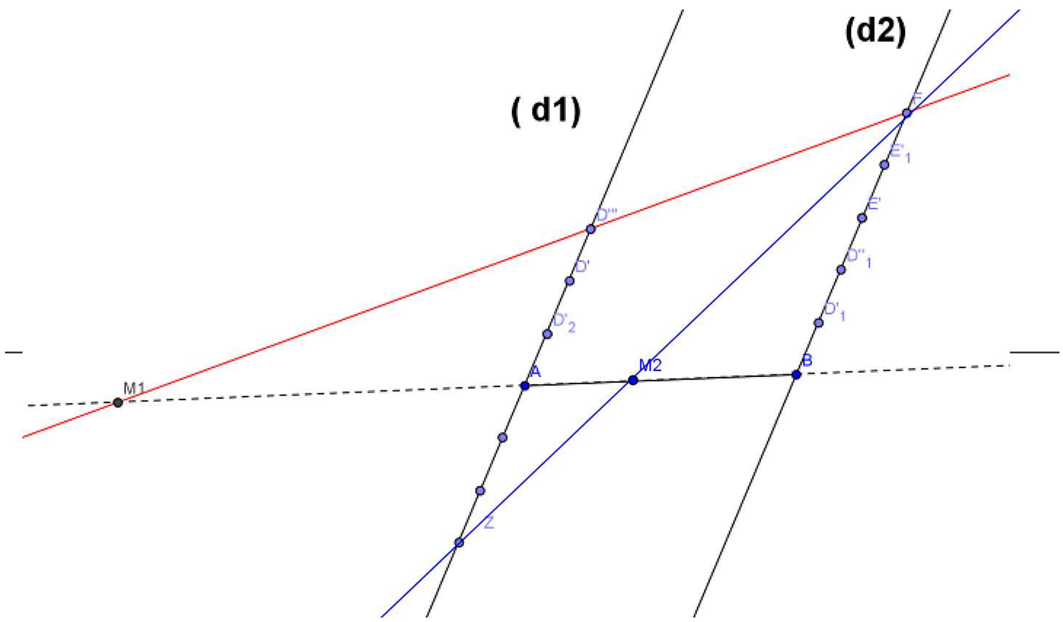
Là-aussi, on a : $\frac{AZ}{BF} = \frac{3}{5}$

Nous n'avons plus qu'à tracer la droite (FZ) : elle coupe [AB] en M_2.

Comme (d1) // (d2), d'après le théorème de Thalès, il vient :

$$\frac{M_2A}{M_2B} = \frac{MZ}{MF} = \frac{3}{5}.$$

Le point M_2 est la deuxième solution de notre problème.



Des exercices sur Thalès et sa réciproque.

Exercice N°1 : Hauteur de la tour Eiffel et hauteur, en degré, du Soleil dans le ciel.

Il fait beau sur Paris, le soleil brille et l'ombre de la tour Eiffel se projette au sol.

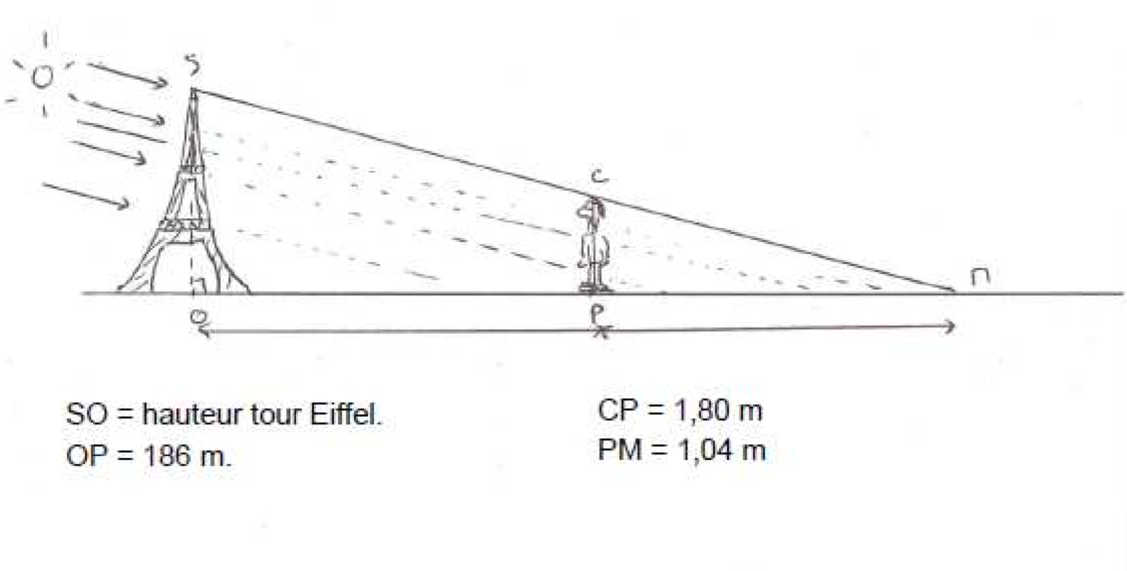
Séraphin, élève de troisième, est aux anges : il est en voyage pédagogique à Paris. Il met à profit ses connaissances mathématiques et physiques pour calculer lui-même la hauteur de la tour Eiffel.

Pour cela, il met en œuvre l'expérience suivante :

Il repère au sol l'extrémité de l'ombre portée de la tour, schématisée par le point M.
Il avance vers la tour jusqu'à ce que l'extrémité de sa propre ombre portée soit confondue avec celle de la tour Eiffel. Il repose alors en P.

Puis il se rend exactement au pied de l'axe de symétrie de la tour, représenté par le point O.

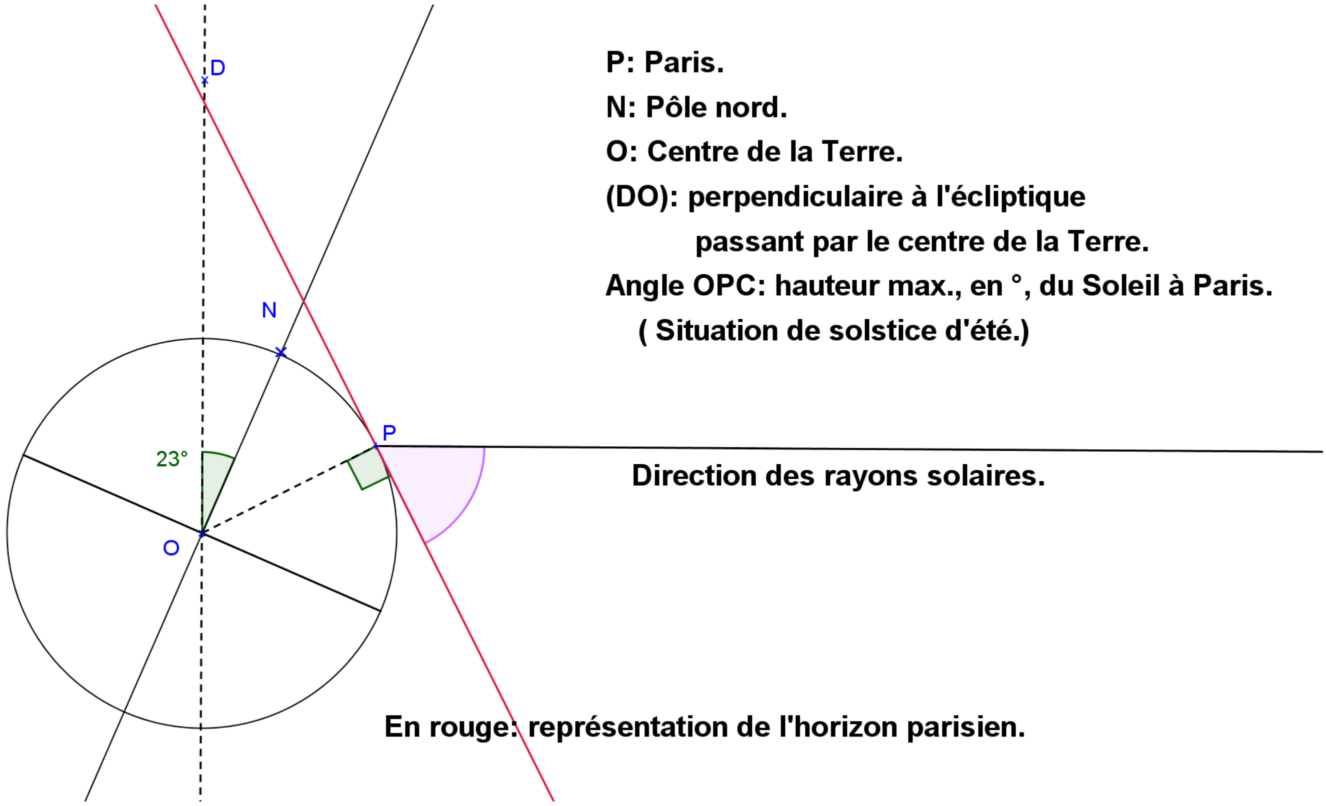
Ayant mesuré les distances OP et PM, et connaissant sa taille PC, il est alors en mesure de calculer la hauteur SO de la tour Eiffel, au mètre près.



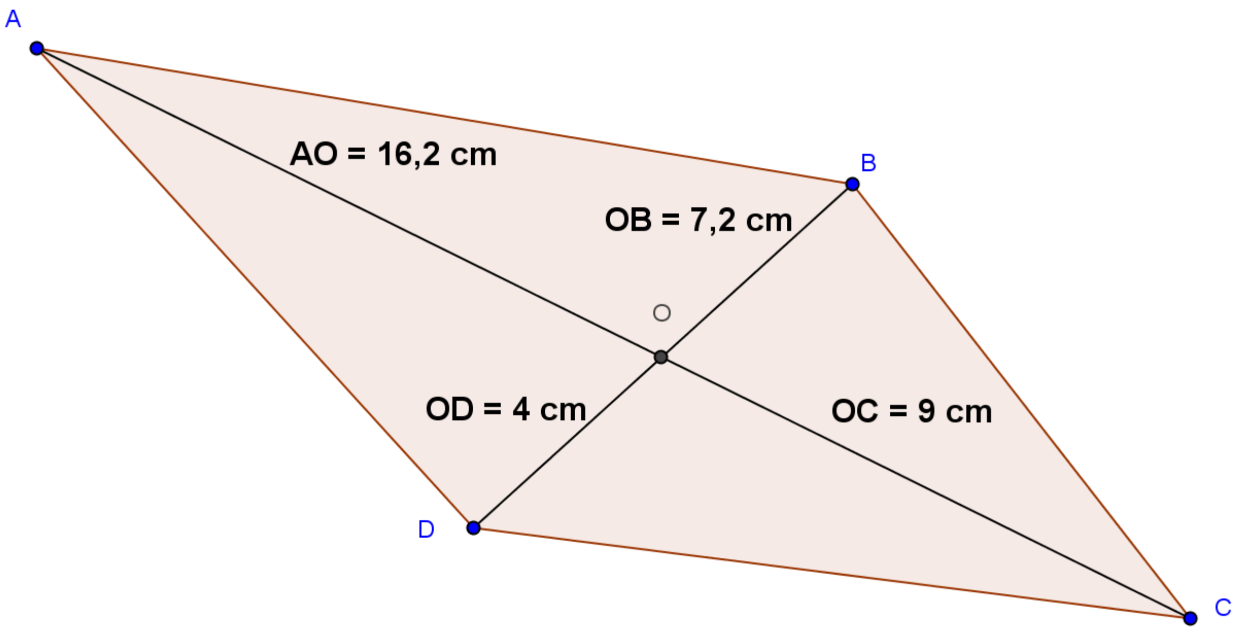
a) Comment a-t-il fait ? Quelle valeur a-t-il trouvée ? Recherche si cette valeur est vraiment la hauteur de la tour Eiffel.

b) Aimant beaucoup les mathématiques, il se pose la question suivante : Quelle est, au degré près, la mesure de l'angle $S\hat{M}O$?

c) Le soleil peut-il réellement être aussi haut dans le ciel de Paris ? La latitude de Paris est de 49° au degré près. (Voir figure page suivante.)



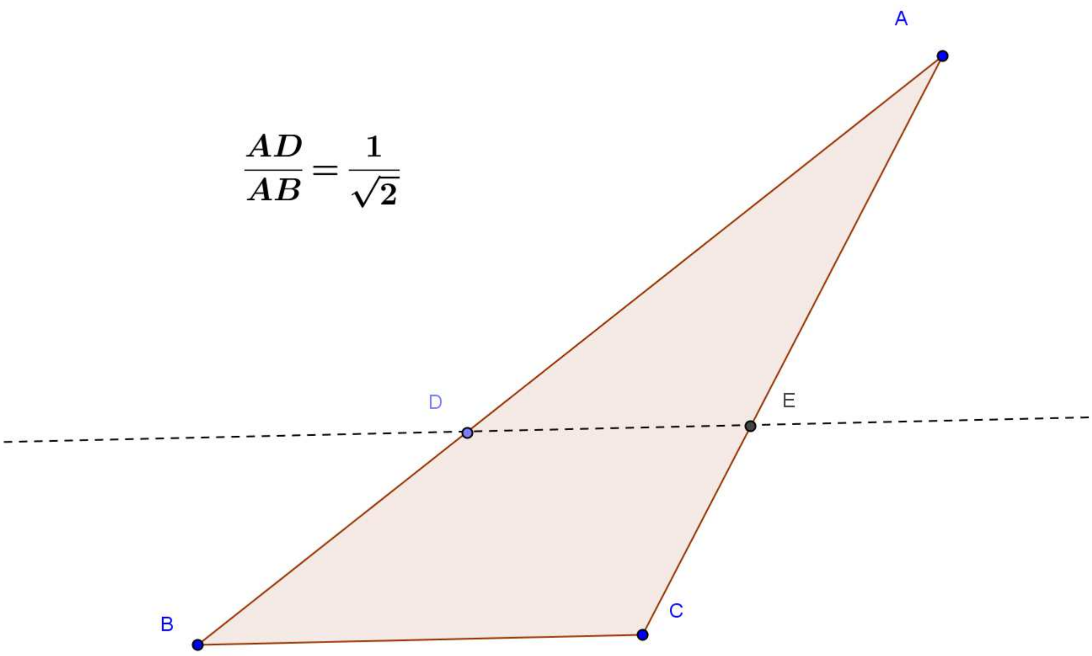
Exercice n°2 : Le quadrilatère ABCD est-il un trapèze ?



Exercice N°3 : [AB] est un segment de longueur AB = 6 cm.

Construire les points M et N de la droite (AB) tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{3}{7}$.

Exercice N°4 : Un pâtissier matheux a découpé une part de tarte de la manière ci-dessous, en un triangle noté ABC. Trouvant la part trop grande pour une personne, il redécoupe cette part parallèlement au côté [BC]. La section coupe les côtés [AC] et [AB] respectivement en E et D de sorte que $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



On note par a l'aire de la part ADE et par A l'aire de la part DECB. Que vaut $\frac{a}{A}$?