

Racines carrées.

1. [Généralités](#) :

- a) Définition :
- b) Notation.
- c) Exemples.

2. [Propriétés](#).

- a) Produits de 2 racines carrées.
- b) Quotient de 2 racines carrées.
- c) Lien avec les puissances.
- d) Modification d'écritures avec des radicaux au dénominateur.

3. [Exercices de bases corrigés](#).

4. [Exercices non corrigés](#).

5. [Approfondissement](#).

1. Généralités :

a) **Définition** : soit a un nombre positif ou nul.

On appelle racine carrée de a le nombre positif dont le carré est égal à a

Cette définition se traduit en écritures mathématiques par :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{0,9^2} = 0,9 \quad \sqrt{\pi^2} = \pi \quad \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8 \quad \text{Pour } x > 0 : \quad \sqrt{\frac{0,7^2}{x}} = \frac{0,7}{x}$$

Remarque : il est essentiel d'acquérir cet automatisme pour se simplifier les écritures mathématiques.

b) **Notation** : on note la racine carrée de a par $\sqrt{a}$.

Le symbole « $\sqrt{\quad}$ » est le symbole « radical ».

c) **Exemples** :

➤ Des racines entières (entier naturel) :

$$0^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = 0$$

$$1^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$$

$$4^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$$

$$11^2 = 121 \Rightarrow \sqrt{121} = 11$$

$$9^2 = 81 \Rightarrow \sqrt{81} = 9$$

$$450^2 = 202500 \Rightarrow \sqrt{202500} = 450$$

➤ Des racines décimales :

$$0,1^2 = 0,01 \Rightarrow \sqrt{0,01} = 0,1$$

$$0,05^2 = 0,0025 \Rightarrow \sqrt{0,0025} = 0,05$$

$$3,5^2 = 12,25 \Rightarrow \sqrt{12,25} = 3,5$$

$$27,43^2 = 752,4049 \Rightarrow \sqrt{752,4049} = 27,43$$

➤ Des racines rationnelles. :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

➤ Des racines irrationnelles : l'écriture la plus simple de la racine carrée de 2 est $\sqrt{2}$.

2. Propriétés.

a) **Produits de 2 racines carrées :**

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

En conséquence :

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$$

➤ Automatismes à acquérir :

Il est essentiel de connaître sa table des carrés pour se simplifier les écritures mathématiques avec radicaux quand celles-ci font apparaître des racines carrées de carrés de nombre entier

$$\sqrt{1^2} = \sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$$

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt{8^2} = \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$$

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$$

$$\sqrt{6^2} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

$$\sqrt{9^2} = \sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$$

$$\sqrt{10^2} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Il faut connaître par cœur la série suivante :

$$\sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{36} = 6 \quad \sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{100} = 10$$

➤ Exemples d'application :

$$a = \sqrt{32}$$

$$a = \sqrt{16 \times 2}$$

$$a = \sqrt{16} \times \sqrt{2}$$

$$a = 4 \times \sqrt{2}$$

$$a = 4\sqrt{2}$$

$$b = 4\sqrt{75} - 6\sqrt{12} + \sqrt{3}$$

$$b = 4\sqrt{25 \times 3} - 6\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{3}$$

$$b = 4 \times \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 6 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$b = 4 \times 5 \times \sqrt{3} - 6 \times 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$b = 20 \times \sqrt{3} - 12 \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{3} \times (20 - 12 + 1)$$

$$b = 9\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{5} \times 2\sqrt{15}$$

$$c = \sqrt{5} \times 2 \times \sqrt{5 \times 3}$$

$$c = \sqrt{5} \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}$$

$$c = 2 \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{3}$$

$$c = 2 \times 5 \times \sqrt{3}$$

$$c = 10\sqrt{3}$$

$$d = 3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 5)$$

$$d = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 3\sqrt{2} \times 5$$

$$d = 3 \times 2 - 15\sqrt{2}$$

$$d = 6 - 15\sqrt{2}$$

$$e = \sqrt{60} \times \sqrt{30} \times \sqrt{50}$$

$$e = \sqrt{2} \times \sqrt{30} \times \sqrt{30} \times \sqrt{2} \times \sqrt{25}$$

$$e = 2 \times 30 \times 5$$

$$e = 300$$

$$f = \frac{\sqrt{20}}{2}$$

$$f = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{5}}{2}$$

$$f = \frac{2 \times \sqrt{5}}{2}$$

$$f = \sqrt{5}$$

b) Quotient de 2 racines carrées :

Pour $a \geq 0$ et $b > 0$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\triangleright \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

c) Lien avec les puissances :

On remarque que les formules relatives aux racines carrées sont des extensions des formules relatives aux puissances d'un nombre appliquées aux racines carrées.

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

et

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

($a \geq 0$ et $b \geq 0$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

et

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

($a \geq 0$ et $b > 0$)

En fait, au lycée, tu apprendras que pour $a \geq 0$: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

d) Modification d'écritures avec des radicaux au dénominateur :

Une règle d'écriture veut de ne jamais avoir de radicaux en dénominateur.

Ainsi, une écriture telle que $\frac{3}{\sqrt{2}}$ est à transformer.

Il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par un même facteur pour avoir 2 écritures différentes de $\frac{3}{\sqrt{2}}$. On va bien sûr multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{2}$.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Généralisation : } \frac{a}{b\sqrt{d}} = \frac{a\sqrt{d}}{b\sqrt{d}} = \frac{a\sqrt{d} \times \sqrt{d}}{b \times \sqrt{d} \times \sqrt{d}} = \frac{a\sqrt{cd}}{bd}$$

3. Exercices de bases corrigés.

a) **Sans calculatrice, donne l'écriture la plus simple des nombres ci-dessous.**

$$a = \sqrt{64}$$

$$a = 8$$

$$b = \sqrt{64} + \sqrt{36}$$

$$b = 8 + 6 = 14$$

$$c = \sqrt{2,5}^2$$

$$c = 2,5$$

$$d = \sqrt{\pi^2}$$

$$d = \pi$$

$$e = (3\sqrt{2})^2$$

$$e = 3^2 \times \sqrt{2}^2$$

$$e = 9 \times 2 = 18$$

$$f = \sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$f = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

$$g = -\sqrt{7}^2$$

$$g = -7$$

$$f = \sqrt{(-3)^2}$$

$$f = \sqrt{9}$$

$$f = 3$$

b) **Donne l'écriture la plus simple des nombres suivants.**

$$f = \left(\frac{\sqrt{20}}{2} \right)^2 - \sqrt{5}^2$$

$$f = \frac{\sqrt{20}^2}{2^2} - 5$$

$$f = \frac{20}{4} - 5$$

$$f = 5 - 5 = 0$$

$$g = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2$$

$$g = \frac{2^2}{\sqrt{5}^2} + \frac{1^2}{\sqrt{5}^2}$$

$$g = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Attention : $\left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

c) **Montre que les nombres ci-dessous sont des entiers naturels à trouver. Donne les étapes de transformation d'écriture.**

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$$b = \frac{2\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$$

$$b = \frac{2\sqrt{9} \times \sqrt{5}}{\sqrt{4} \times \sqrt{5}}$$

$$b = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$

$$c = 3\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times 4\sqrt{5}$$

$$c = 3 \times \sqrt{2}^2 \times \sqrt{5}^2 \times 4$$

$$c = 3 \times 2 \times 5 \times 4$$

$$c = 120$$

d) **Ecrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un nombre entier relatif.**

$$a = \sqrt{20}$$

$$a = \sqrt{4 \times 5}$$

$$a = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$$

$$a = 2\sqrt{5}$$

$$b = 2\sqrt{45}$$

$$b = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5}$$

$$b = 2 \times 3\sqrt{5}$$

$$b = 6\sqrt{5}$$

$$c = \frac{\sqrt{80}}{2}$$

$$c = \frac{\sqrt{16 \times 5}}{2}$$

$$c = \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

e) Donner le nombre B sous la forme $a\sqrt{3}$ avec a entier relatif. La réussite passe par la table de 3...

$$B = \sqrt{12} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75}$$

$$B = \sqrt{4 \times 3} + 2\sqrt{16 \times 3} - \sqrt{25 \times 3}$$

$$B = \sqrt{4} \times \sqrt{3} + 2\sqrt{16} \times \sqrt{3} - \sqrt{25} \times \sqrt{3}$$

$$B = 2\sqrt{3} + 2 \times 4 \times \sqrt{3} - 5 \times \sqrt{3}$$

$$B = 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$$

$$B = \sqrt{3} \times (2 + 8 - 5) = 5\sqrt{3}$$

f) Démontre que $A = \sqrt{40} \times \sqrt{15} \times \sqrt{6}$ est un nombre entier à déterminer.

$$A = \sqrt{40} \times \sqrt{15} \times \sqrt{6}$$

$$A = \sqrt{4} \times \sqrt{10} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

$$A = 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

$$A = 2 \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2^2}$$

$$A = 2 \times 5 \times 3 \times 2 = 60$$

g) Soit $E = (2\sqrt{3} + 1)(3\sqrt{3} + 3)$. Développer E et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$E = (2\sqrt{3} + 1)(3\sqrt{3} + 3)$$

$$E = 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \times 3 + 1 \times 3\sqrt{3} + 1 \times 3$$

$$E = 6 \times 3 + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3$$

$$E = 18 + 9\sqrt{3} + 3$$

$$E = 21 + 9\sqrt{3}$$

h) Transformer ces écritures pour ne plus avoir de radicaux en dénominateur :

$$a = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$b = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$c = \frac{9(2 - \sqrt{6})}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$b = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$c = \frac{9(2 - \sqrt{6})}{\sqrt{3}} = \frac{9(2 - \sqrt{6}) \times \sqrt{3}}{3}$$

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}$$

$$b = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{6}}{6}$$

$$c = 3\sqrt{3}(2 - \sqrt{6}) = 6\sqrt{3} - 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}$$

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$b = \frac{2\sqrt{30}}{6}$$

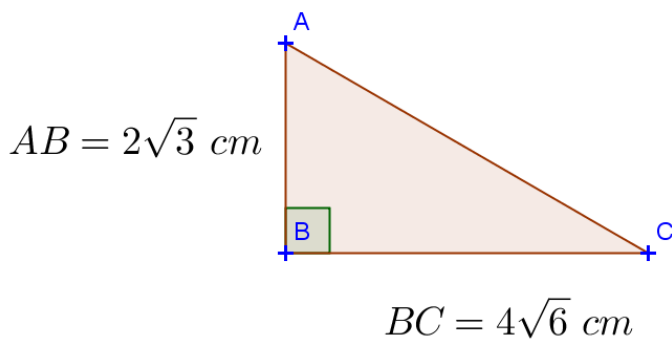
$$c = 6\sqrt{3} - 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

$$c = 6\sqrt{3} - 3 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{3} - 9\sqrt{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$c = 3(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$$

i) **Géométrie et racine carrée : Pythagore. Aire du triangle rectangle. Cosinus.** ABC est un triangle rectangle en B tel que :



1. Démontrez que l'aire A du triangle ABC vaut $12\sqrt{2}.cm^2$

2. Démontrez que $AC = 6\sqrt{3}.cm$.

3. Calculez $\cos \hat{C}$ en donnant le résultat sous la forme $\frac{a\sqrt{b}}{c}$

4. En déduire la mesure de l'angle $\hat{C}$ au degré près.

Attention : $(ab)^2 = a^2 \times b^2$.

1) Aire de ABC :

$$A = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 4\sqrt{6}}{2}$$

$$A = \sqrt{3} \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 4 \times \sqrt{3}^2 \times \sqrt{2}$$

$$A = 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}.cm^2$$

2) Calcule de AC :

D'après Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = (2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{6})^2$$

$$AC^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 + 4^2 \times \sqrt{6}^2$$

$$AC^2 = 4 \times 3 + 16 \times 6$$

$$AC^2 = 12 + 96 = 108 \Rightarrow AC = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = \sqrt{36} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}.cm$$

3) Calcul de $\cos \hat{C}$:

$$\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{4\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \frac{2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2 \times 3 \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

4) Calcul de $\hat{C}$:

$$\cos \hat{C} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \hat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 19^\circ \text{ au degré près.}$$

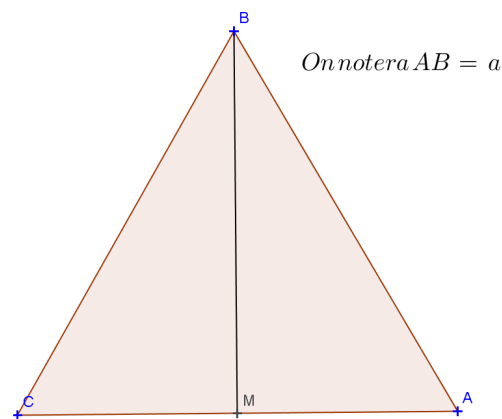
4. Exercices non corrigés.

a) ABC est un triangle équilatéral de côté noté a . M est le milieu du segment [AC].

1. Calculer les mesures des angles du triangle ABM en justifiant.

2. Démontrer que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

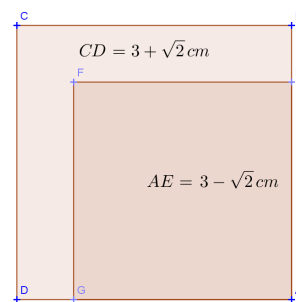
3. Démontrer que $\tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$



b) En développant E, montrer que $E = -66 + 36\sqrt{2} - 30\sqrt{3}$

$$E = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{6})(4\sqrt{3} - 5\sqrt{6})$$

c) ABCD et AEFG sont deux carrés.
Calculer l'aire du polygone EBCDGF.



d) Calcul littéral et radicaux.

➤ Démontrer que $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

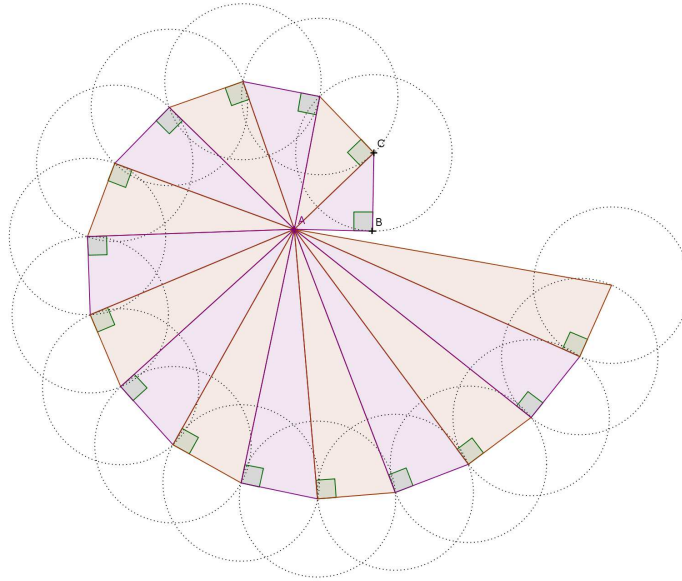
➤ Démontrer que $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = \sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

➤ Soit a et b deux nombres positifs.

Démontrer que
$$\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{ab}$$

➤ Sans calculatrice, en déduire la valeur exacte de $\alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

- e) Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. Les cercles en pointillés sont des aides à la construction et à l'analyse de la figure.



- Fais une figure en prenant $AB = 2\text{ cm}$

Pour la suite : on supposera que $AB = 1\text{ cm}$.

- Calculer la longueur de l'hypoténuse des 3 premiers triangles rectangles et en déduire les autres.
- Soit P le périmètre de la « spirale » formée par ces 17 triangles rectangles
Donner la valeur exacte de P et sa valeur approchée au mm près.
- Soit A son aire : donner sa valeur exacte et sa valeur approchée au mm^2 près.

- f) Sans utiliser aucune valeur approchée de quelque nombre que ce soit, dessiner un carré de côté $c = 5\sqrt{2}\text{ cm}$. Expliquer votre démarche.

- g) Soit n un entier naturel :

Si n est pair : alors il existe un nombre entier naturel unique k tel que $n = 2k$.

Si n est impair : alors il existe un nombre entier naturel unique k tel que $n = 2k + 1$

- Trouver k pour $n = 6$ $n = 9$ $n = 12$ $n = 19$.

- Démontrer que :

Si n est pair : alors $\sqrt{10^n} = 10^{\frac{n}{2}}$

Si n est impair : alors $\sqrt{10^n} = 10^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{10}$

- Calculer $\sqrt{10^6}$, $\sqrt{10^9}$, $\sqrt{10^{12}}$ et $\sqrt{10^{19}}$.

5. Approfondissement.

a) **Propriété n°1 :**

Soit trois nombres a , b et k

Si $a > b$, alors $a - b > 0$.

Démonstration :

Si $a > b$, il existe un nombre $d > 0$ tel que $a = b + d$.

On a alors $a - b = b + d - b = d > 0$. C.Q.F.D.

Propriété n°2 : Si $a > b$, alors $a + k > b + k$.

Démonstration :

Si $a > b$, il existe un nombre $d > 0$ tel que $a = b + d$.

On a alors $a + k = b + d + k = (b + k) + d$

Comme $d > 0$, $(b + k) + d > b + k$. On a donc $a + k > b + k$.

Autrement dit, l'addition d'un même terme ne modifie pas l'ordre entre deux nombres. (Ni la soustraction, puisque soustraire équivaut à ajouter l'opposé.)

Propriété n°3 : Si $a - b > 0$, alors $a > b$ (Réciproque de la propriété n°1)

Démonstration :

Si $a - b > 0$, alors $a - b + b > 0 + b$ (propriété n°2), soit $a > b$. C.Q.F.D.

Cette propriété sert à comparer des nombres en étudiant le signe de leur différence.

Propriété n°4 :

Soit deux nombres a , b quelconques et k , un troisième POSITIF.

Si $a > b$, alors $ka > kb$

Démonstration :

$$ka - kb = k(a - b)$$

Comme $a > b$, alors $a - b > 0$. (Propriété n°1)

Comme $k > 0$, d'après les hypothèses, alors $k(a - b)$ est positif. (Car produit de 2 facteurs positifs.)

Conclusion: $ka - kb > 0$. C'est donc que $ka > kb$. (Propriété n°3). C.Q.F.D.

Autrement dit : multiplier 2 nombres par un même facteur positif ne modifie pas leur ordre.

Propriété n°5 :

Soit 2 nombres positifs a et b : si $a > b$, alors $a^2 > b^2$.

Démonstration :

Si $a > b$, alors $a \times a > b \times a$ (d'après la propriété n°4)

Soit : si $a > b$, alors $a^2 > ab$

Si $a > b$, alors $a \times b > b \times b$ (d'après la propriété n°4)

Soit : si $a > b$, alors $ab > b^2$.

Conclusion : si $a > b$, alors $a^2 > ab > b^2$, donc $a^2 > b^2$. C.Q.F.D.

Propriété n°6 :

Soit 2 nombres positifs a et b : si $a^2 > b^2$, alors. $a > b$
(Réciproque de la propriété n°4)

Démonstration :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (\text{Cours identité remarquable.})$$

Comme $a > 0$ et $b > 0$ (d'après les hypothèses), alors $a + b > 0$.

Comme $a^2 > b^2$ (d'après les hypothèses), alors $a^2 - b^2 > 0$ (Propriété n°1).

Donc le produit de deux facteurs $(a + b)(a - b)$ est de signe positif. Or un produit de deux facteurs positifs est obligatoirement un produit de deux facteurs de même signe.

Comme $a + b > 0$, alors $a - b > 0$, donc $a > b$. (propriété n°3). C.Q.F.D.

Autrement dit : deux nombres positifs sont dans le même ordre que leur carré.

b) Classer des nombres s'écrivant avec des radicaux :

On donne $a = \frac{9\sqrt{3}}{7}$ et $b = \frac{3\sqrt{7}}{2}$. a et b sont dans le même ordre que leur carré.

$$a^2 = \left(\frac{9\sqrt{3}}{7} \right)^2 = \frac{81 \times 3}{49} = \frac{243}{49}$$

$$b^2 = \left(\frac{3\sqrt{7}}{2} \right)^2 = \frac{9 \times 7}{4} = \frac{63}{4} = \frac{63 \times 49}{4 \times 49} = \frac{3087}{196}$$

Comme $a^2 > b^2$, alors $a > b$.

$$\frac{3\sqrt{7}}{2} > \frac{9\sqrt{3}}{7}$$

c) Un élève calcule le cosinus d'un angle α et propose : $\cos(\alpha) = \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

Il cherche ensuite l'angle α en utilisant la procédure classique avec la touche $\cos^{-1}$ et obtient un message d'erreur.

Rien de plus normal car $\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{9 \times 3}{25} = \frac{27}{25}$. Comme $27 > 25$, alors $\frac{27}{25} > 1$

Comme $1 = 1^2$, on a $\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)^2 > 1^2 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{5} > 1$.

Or, un cosinus est obligatoirement inférieur ou égal à 1, d'où le problème.

h) Propriétés des racines carrées : Soit a et b deux nombres positifs :

Si $a > b$, alors $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. (n°1)

Si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (n°2)

(n°1) : Soit a et b deux nombres positifs tels que $a > b$.

$$\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \text{ d'après les identités remarquables.}$$

Or $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{b} > 0$ d'après la définition des racines carrées. On a donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ est donc du signe de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

$$\text{Or } (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b.$$

D'après les hypothèses, $a > b \Rightarrow a - b > 0$.

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ est donc positif, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ est donc positif et $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

Conclusion : Si $a > b$, alors $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

(n°2) : Elle se démontre de manière analogue à la n°1.

➤ Démontre que :

Si $a > 1$, alors $a > \sqrt{a}$.

Si $a < 1$, alors $a < \sqrt{a}$.