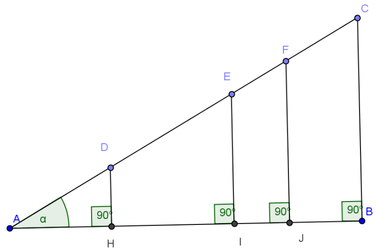
# Trigonométrie dans le triangle rectangle.

## *1.* Rappel 4ème : le cosinus d'un angle dans un triangle rectangle.

*a) Soit ABC un triangle rectangle en B, d'angle de sommet A noté α.*

Les droites (DH), (EI), (FJ) et (CB) sont toutes parallèles. Les angles de sommet H, I, J et B sont tous correspondants donc égaux.

On a donc une série de triangles rectangles ayant tous 3 angles égaux mais des longueurs de côtés différentes.




b) *Depuis la 4ème, tu sais que si un triangle est coupé par une droite parallèle à un de ces côtés, il y a proportionnalité entre les longueurs des 2 triangles.*

En utilisant les triangles ADH et ACB, on peut donc affirmer :

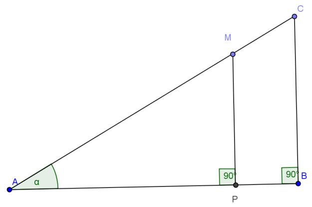
$$\frac{AD}{AC}=\frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{AD}{AC}\times\frac{AB}{AD}=\frac{AH}{AB}\times\frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AH}{AD}$$

On peut de même utiliser les triangles AEI et ACB pour démontrer que $\frac{AB}{AC}=\frac{AI}{AE}$

et encore AFJ et ACB pour démontrer que $\frac{AB}{AC}=\frac{AJ}{AF}$

Finalement : quel que soit le point P sur [AB] et M sur [AC] de sorte que AMP soit rectangle en P, on a toujours:

$\frac{AP}{AM}=\frac{AB}{AC}$, la valeur de ce quotient ne dépendant que de $\alpha$.

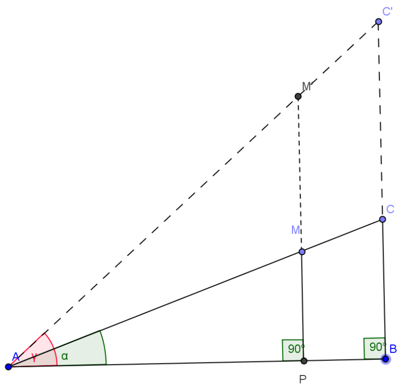



*c) Evolution de ce quotient :*

On remarque que si l'angle α augmente, AM et AC augmentent tous deux en devenant AM' et AC'

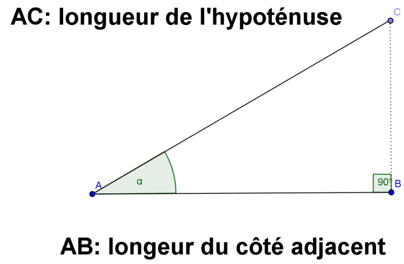
On a encore $\frac{AP}{AM'}=\frac{AB}{AC'}$

Comme AP et AB ne changent pas, la valeur du quotient diminue quand l'angle α augmente.



## d) Cosinus d'un angle dans un triangle rectangle.

Pour un angle donné, le coefficient de proportionnalité entre la longueur du côté adjacent de l'angle et de l'hypoténuse s'appelle le cosinus de cet angle.




A savoir par cœur : $\cos(\hat{A}) = \dfrac{AB}{AC}$, soit : $\cos = \dfrac{adjacent}{hypoténuse}$.

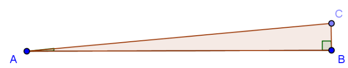
*Propriété :*

*Pour un angle non-droit du triangle rectangle : son coté le plus grand sera toujours l'hypoténuse.*

*On aura toujours :* $\dfrac{Côté.adjacent}{hypoténuse.} < 1$

*Observons 2 cas extrêmes :*

*Si le point C se rapproche de plus en plus de B jusqu'à se confondre avec lui, l'angle* $\hat{A}$ *devient nul alors que côté adjacent et hypoténuse se confondent.*




*Parallèlement : l'angle* $\hat{B}$ *augment pour atteindre la valeur limite de 90° pendant que le côté [BC] devient nul.*

*En conséquence :* $\cos(0°) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{AB} = 1$ *et* $\cos(90°) = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{0}{AC} = 0$

*Finalement :* *Soit* $\alpha$ *un angle tel que* $0° \leq \alpha \leq 90°$ : $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.

*Remarque :*

*La calculatrice possède une touche qui donne la valeur des cosinus des angles. Attention : elle doit être réglée dans le mode « degré ». (Un « D » doit être affiché dans la barre des modes.)*

*Ainsi : Avec la calculatrice, tu obtiens : cos (0°) = 1* *cos (60°)=0,5* *cos (18°)* $\approx$ *0,951.*

*Pour certaines valeurs d'angle, la valeur exacte du cosinus peut parfois s'afficher sous la forme d'une écriture fractionnaire avec des racines carrées en numérateur.*

$\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ $\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$

*(Certaines valeurs de cosinus sont décimales exactes. Habitue-toi à utiliser les valeurs exactes en écritures fractionnaires avec racines carrées. Très souvent, tu n'auras même-pas à écrire les valeurs des cosinus. Tu n'écriras que cos(…°), sans te préoccuper de la valeur du quotient trigonométrique. Il en sera de-même pour le sinus et la tangente. )*

## e) Utilisation du cosinus : 
En $3^{ème}$, le cosinus d'un angle est utilisé essentiellement dans 2 types d'activités.

- Calculer des longueurs dans un triangle rectangle dont on connait les angles et une longueur.
- Calculer les valeurs des angles dans un triangle rectangle dont on connait au minimum 2 longueurs.

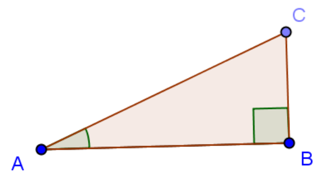
e1 Calculer soi-même un cosinus en utilisant Pythagore :

ABC triangle rectangle en B. AB = 24 cm et BC = 7 cm.
Calculer AC puis $\cos(\hat{A})$ et cos ( $\hat{C}$ ).

*1) D'après Pythagore :* $AC^2 = AB^2 + CB^2 = 24^2 + 7 = 576 + 49 = 625$

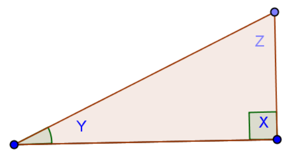
$AC = \sqrt{625} = 25cm$

*2)* $\cos \hat{A} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{24}{25} = 0,96$ *et* $\cos \hat{C} = \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{7}{25} = 0,28$




e2) Bis : XYZ triangle rectangle en X. YZ = 10 cm et ZX = 2,8 cm.

- Calculer $\cos(\hat{Z})$ sous la forme d'une fraction irréductible.
- Calculer YX.
- Calculer $\cos(\widehat{Y})$ sous la forme d'une fraction irréductible.




*1)* $\cos \hat{Z} = \dfrac{ZX}{ZY} = \dfrac{2,8}{10} = \dfrac{28}{100} = \dfrac{7}{25}$

*2) D'après Pythagore :*

$ZY^2 = YX^2 + XZ^2$
$10^2 = 2,8^2 + YX^2$
$100 = 7,84 + YX^2$
$YX^2 = 100 - 7,84 = 92,16$
$YX = \sqrt{92,16} = 9,6$

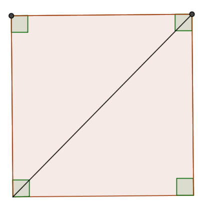
*3)* $\cos \hat{Y} = \dfrac{YX}{YZ} = \dfrac{YX}{YZ} = \dfrac{9,6}{10} = \dfrac{96}{100} = \dfrac{24}{25}$.

*On remarque que les valeurs des cosinus des angles des triangles ABC et XYZ sont égales.*
*Nos deux triangles ont donc des angles égaux. ABC est forcement un agrandissement de XYZ à une certaine échelle calculée ci-dessous.*

$\dfrac{AC}{YZ} = \dfrac{25}{10} = 2,5$ $\dfrac{AB}{YX} = \dfrac{24}{9,6} = 2,5$ $\dfrac{BC}{ZX} = \dfrac{7}{2,8} = 2,5$

*Les longueurs de ABC sont 2,5 fois plus grandes que celles de XYZ.*

*e3) Demontrer que* $\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



*Soit un carré de côté noté c. Une diagonale du carré le coupe en 2 triangles rectangles isocèles ayant 2 angles de 45°. Notons d la mesure de la diagonale.*

*D'après Pythagore :*

$d^2 = c^2 + c^2$
$d^2 = 2c^2$
$d = \sqrt{2c^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{c^2} = \sqrt{2} \times c = c\sqrt{2}$

$$\cos(45°) = \frac{c}{d} = \frac{c}{c \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e3) Calculer une longueur dans un triangle rectangle en connaissant un angle.

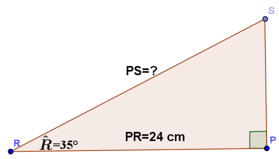
D'après la définition, on a : $\cos(\alpha)=\dfrac{côté.adjacent}{hypoténuse}$. Deux produits en croix donnent alors :

$$\cos(\alpha)=\frac{côté.adjacent}{hypoténuse} \Rightarrow côté.adjacent = hypoténuse \times \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha)=\frac{côté.adjacent}{hypoténuse} \Rightarrow hypoténuse = \frac{côté.adjacent}{\cos(\alpha)}$$

**Exemples : toujours faire des croquis annotés de toutes les informations de l'énoncé !**

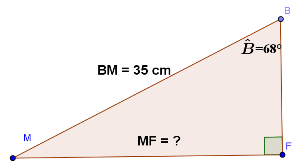
- PRS rectangle en P. $\hat{R}=35°$ et PR = 24 cm. Calculer PS au mm près.




$$\cos(35°)=\frac{24}{PS} \Rightarrow PS = \frac{24}{\cos(35°)}cm \approx 29,3cm$$

*L'arrondi au mm près d'une mesure en cm est son arrondi au* $\frac{1}{10}$ *car* $1mm=\frac{1}{10}cm$

- BFM rectangle en F. $\hat{B}=68°$ et BM = 35 m. Calculer BM au cm près.




$$\cos(68°)=\frac{BF}{35} \Rightarrow BF = 35\times\cos(68°)cm = 35\cos(68°)cm \approx 13,1.cm$$

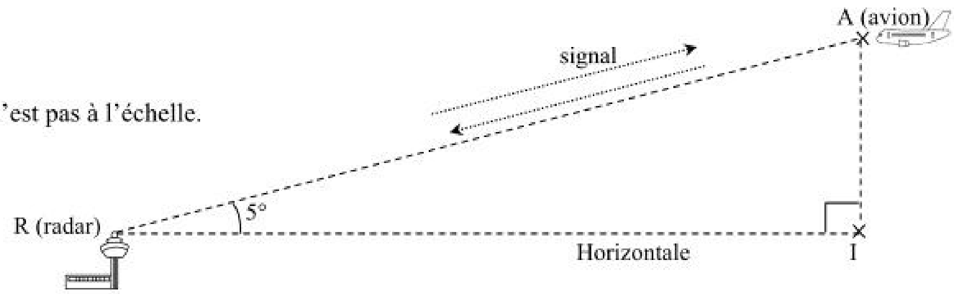
- Exo géométrie brevet 2012.

**PARTIE II**

Quand l'avion n'est plus très loin de l'aéroport de Toulouse, le radar de la tour de contrôle émet un signal bref en direction de l'avion. Le signal atteint l'avion et revient au radar 0,0003 secondes après son émission.

**1)** Sachant que le signal est émis à la vitesse de 300 000 kilomètres par seconde, vérifier qu'à cet instant, l'avion se trouve à 45 kilomètres du radar de la tour de contrôle.

Le dessin n'est pas à l'échelle.




**2)** La direction radar–avion fait un angle de 5° avec l'horizontale.
Calculer alors l'altitude de l'avion à cet instant. On arrondira à la centaine de mètres près.
*On négligera la hauteur de la tour de contrôle.*

1) Calcul de la distance AR : 0,0003 s est le temps mis par le signal pour parcourir l'aller-retour, soit 2AR.

$Cours : v = \frac{d}{t}.$ Application : $300000 = \frac{2AR}{0,0003} \Rightarrow 2AR = 300000 \times 0,0003.km = 90km \Rightarrow AR = \frac{90}{2}km = 45km.$

2) L'altitude de l'avion correspond à la longueur AI, si on néglige la hauteur de la tour radar.

La partie 1 nous a fait calculer l'hypoténuse du triangle RAI.
Dans cette question, nous devons calculer AI, côté adjacent de l'angle de sommet A.

Pour calculer cette longueur, il faut avant calculer l'angle.

$\hat{A} = 180 - (90+5) = 180 - 95 = 85°$

$\cos(85°) = \frac{AI}{AR}$

$\cos(85°) = \frac{AI}{45} \Rightarrow AI = 45\cos(85°)km \simeq 3,9km$

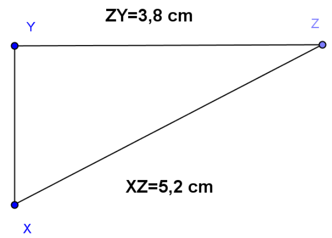
*L'arrondi à la centaine de m d'une mesure en km est son arrondi au* $\frac{1}{10}$ *car* $100m = \frac{1}{10}km$

e4) Calculer un angle à partir de la connaissance de son cosinus : touche $\cos^{-1}$ (acs - arccos).

Principe : Chaque angle a son cosinus. Si on connait le cosinus d'un angle, on peut retrouver la mesure de l'angle.

- XYZ est un triangle rectangle en Y tel que ZX = 5,2 cm et YZ = 3,8 cm.

  Calculer $\cos(\hat{Z})$ puis donner la valeur de $\widehat{Z}$ au degré près.




$\cos(\widehat{Z}) = \frac{ZY}{ZX} = \frac{3,8}{5,2} = \frac{19}{26} \Rightarrow \hat{Z} = \cos^{-1}\left(\frac{19}{26}\right) \approx 43°$

**SURTOUT NE PAS ARRONDIR LE COSINUS ! UNE DIFFERENCE DE 1/10 SUR LE COSINUS PEUT ENTRAINER UNE DIFFERENCE D'ANGLE DE PLUSIEURS ° !**

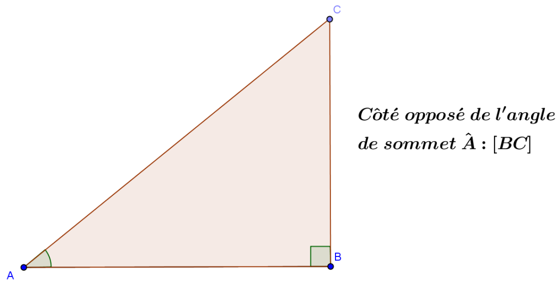
$\cos^{-1}(0,7) \approx 45,57°$ $\cos^{-1}(0,8) \approx 36,87°$

## 2. Sinus d'un angle.

### a) Définition :

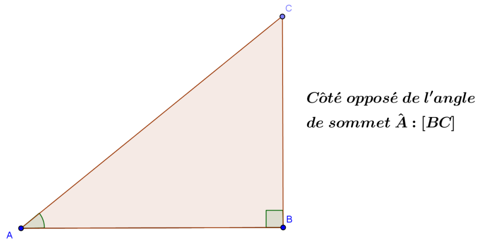
- Côté opposé d'un angle non droit dans le triangle rectangle :

  Le côté opposé d'un angle non droit d'un triangle rectangle est le seul côté du triangle qui n'est pas un côté de l'angle.




  Ainsi, dans le triangle ABC ci-dessus :
  L'angle de sommet A est formé des côtés [AC] et [AB]. Le côté [CB] est son côté opposé.
  L'angle de sommet C est formé des côtés [CA] et [CB]. Son côté opposé est le côté [AB].

- Sinus d'un angle :
  Tu sais que, pour un angle donné d'un triangle rectangle, il y a proportionnalité entre la longueur du côté adjacent et celle de l'hypoténuse.




  On a $\cos\hat{C} = \dfrac{CB}{CA}$.
  Comme CB est le côté opposé de l'angle de sommet $\hat{A}$, il y a alors proportionnalité entre la longueur du côté opposé de l'angle de sommet A et celle de l'hypoténuse. Le coefficient de proportionnalité entre le côté opposé de l'angle et l'hypoténuse est le sinus de l'angle.

***A savoir :***

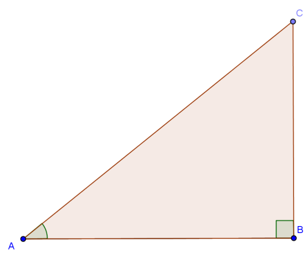
$$\sin\hat{A} = \frac{CB}{CA} = \frac{Côté.opposé}{hypoténuse.}$$

### b) Propriétés :

- On remarque que $\sin\hat{A} = \cos\hat{C} = \dfrac{CB}{CA}$ avec $\hat{A} + \hat{C} = 90°$.

$$\sin(\alpha) = \cos(90-\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \sin(90-\alpha)$$

- Dans le triangle ABC rectangle en B : d'après l'égalité de Pythagore :




$$\left[\sin\left(\hat{A}\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\hat{A}\right)\right]^2 = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\left[\sin\left(\hat{A}\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\hat{A}\right)\right]^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

Notation : il est d'usage de noter $\left[\cos\left(x\right)\right]^2 = \cos(x)\times\cos(x) = \cos^2(x)$.

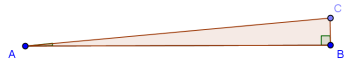
Ainsi :

$$\cos^2\left(x\right) + \sin^2\left(x\right) = 1$$

- Pour un angle non-droit du triangle rectangle : son côté le plus grand sera toujours l'hypoténuse.

On aura toujours : $\frac{Côté.opposé}{hypoténuse.} < 1$ de même que $\frac{Côté.adjacent}{hypoténuse.} < 1$

Observons 2 cas extrêmes : Si le point C se rapproche de plus en plus de B jusqu'à se confondre avec lui, l'angle $\hat{A}$ devient nul alors que côté adjacent et hypoténuse se confondent tandis que le côté opposé BC devient nul.




Parallèlement : l'angle C augmente pour atteindre la valeur limite de 90°. En conséquence :

$\cos(0°) = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AB} = 1$ et $\sin(0°) = \frac{BC}{AC} = \frac{0}{AC} = 0$.   $\cos(90°) = \frac{BC}{AC} = \frac{0}{AC} = 0$ et $\sin(90°) = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$

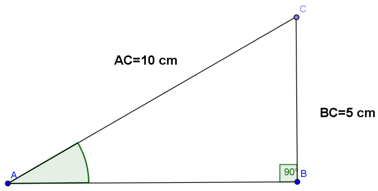
Finalement : Soit $\alpha$ un angle tel que $0° \leq \alpha \leq 90°$ :   $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$.

## c) Utilisation du sinus d'un angle : Les mêmes que pour le cosinus. *Les exemples ci-dessous sont basiques.*

- Calcul de $\sin(\hat{A})$ et de $\sin(\hat{C})$

$$\sin(\hat{A}) = \frac{CB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.et.\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{AC}$$

D'après Pythagore :
$$AC^2 = Ab^2 + BC^2$$
$$10^2 = AB^2 + 5^2$$
$$100 = AB^2 + 25$$
$$AB^2 = 100 - 25 = 75$$
$$AB = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$



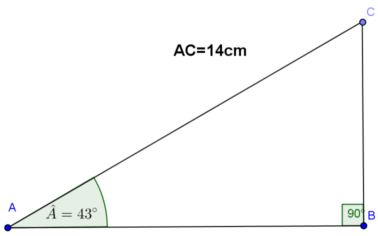

$$\sin(\hat{C}) = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Un angle $\alpha$ est tel que $\cos(\alpha) = \frac{2}{5}$. *Calculons son sinus. On sait que* $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \sin^2(\alpha) = 1$$

donc :
$$\frac{4}{25} + \sin^2(\alpha) = 1$$
$$\sin^2(\alpha) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{25}{25} - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$
$$\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

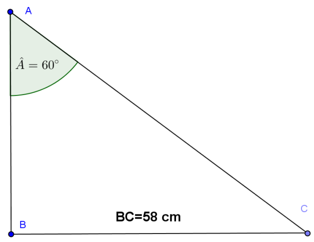
- Calcul de longueur : *Calculer BC au mm près.*




$$\sin(43°) = \frac{CB}{14} \Rightarrow CB = 14\sin(43°)cm \approx 9{,}5cm$$

- Calculer AC :

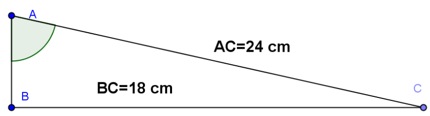
$$\sin(60°) = \frac{BC}{AC} = \frac{58}{AC} \Rightarrow AC = \frac{58}{\sin(60°)}cm \approx 66{,}9cm$$




- Calcul d'angle avec la touche $\sin^{-1}$ ; *asn* .

*Calculons l'angle de sommet A au 1/10 de degré près.*

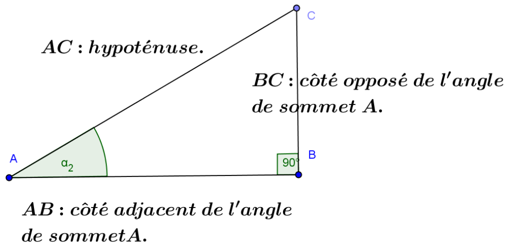
$$\sin(\hat{A}) = \frac{CB}{CA} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \Rightarrow \hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 48{,}6°$$



# 3. Tangente d'un angle non droit dans le triangle rectangle.

## a) Définition :

Pour un angle de sommet A donné : la longueur du côté opposé est proportionnelle à celle de l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse est proportionnelle à celle du côté adjacent. On en déduit que la longueur du côté opposé est proportionnelle à celle du côté adjacent.



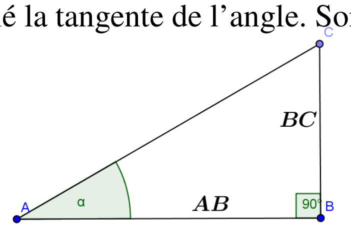

Pour un angle de sommet A donné : $\dfrac{CB}{AB} = K$. où K est une constante.

*Démonstration :*

$$\left.\begin{array}{l} \cos\left(\hat{A}\right) = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC\cos\left(\hat{A}\right) \\ \sin\left(\hat{A}\right) = \dfrac{CB}{AC} \Rightarrow CB = AC\sin\left(\hat{A}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{AC\sin\left(\hat{A}\right)}{AC\cos\left(\hat{A}\right)} = \frac{\sin\left(\hat{A}\right)}{\cos\left(\hat{A}\right)} = K.$$

Ce coefficient de proportionnalité est appelé la tangente de l'angle. Son abréviation est « tan ».

$$\tan\left(\hat{A}\right) = \frac{BC}{AB} = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}}$$




*La démonstration (1) donne aussi comme définition de la tangente d'un angle :* $\tan\left(\hat{A}\right) = \dfrac{\sin\left(\hat{A}\right)}{\cos\left(\hat{A}\right)}$.

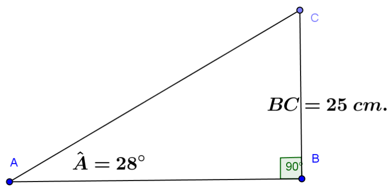
*Cette formule est peu utilisée au collège.*
*En revanche, elle le sera par la suite pour certains d'entre vous.*

*remarque* : $\tan\left(\hat{A}\right) = \dfrac{BC}{AB}$.... $\tan\left(\hat{C}\right) = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\tan\left(\hat{A}\right)}$ *avec* $\hat{A} + \hat{C} = 90°$. *La tangente d'un angle est égale à l'inverse de celle de son angle complémentaire.*

## b) Utilisation de la tangente.

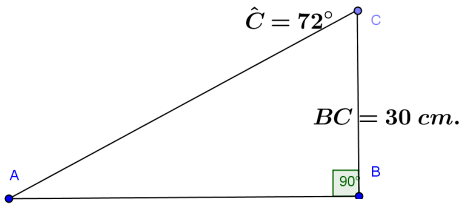
### 1. Calcul de longueur :

- Calculons AB au mm près :




$$\tan(28°) = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{AB} \Rightarrow AB = \frac{25}{\tan(28°)} cm \approx 47cm$$

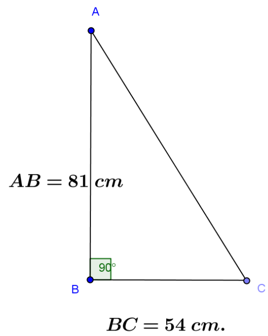
- Calculons AB au mm près :




$$\tan(72°) = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{30} \Rightarrow AB = 30\tan(72°)cm \approx 92{,}3cm$$

### 2. Calcul d'angle : touche $\tan^{-1}; atn; \arctan$.

- Calculons les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ au degré près en utilisant la tangente.




$$\tan\left(\hat{A}\right) = \frac{BC}{AB} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3} \Rightarrow \hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}7°$$

$$\tan\left(\hat{C}\right) = \frac{AB}{BC} = \frac{51}{54} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\hat{C}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}3°$$

## 4. Tableau de valeurs remarquables :

Il est bon de connaître les valeurs exactes suivantes par cœur, surtout dans une perspective de 2[de] gale.

| Angle en degré. | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Sinus | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| Cosinus | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| Tangente | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | N'EXISTE PAS |

## 5. Quart de cercle trigonométrique.

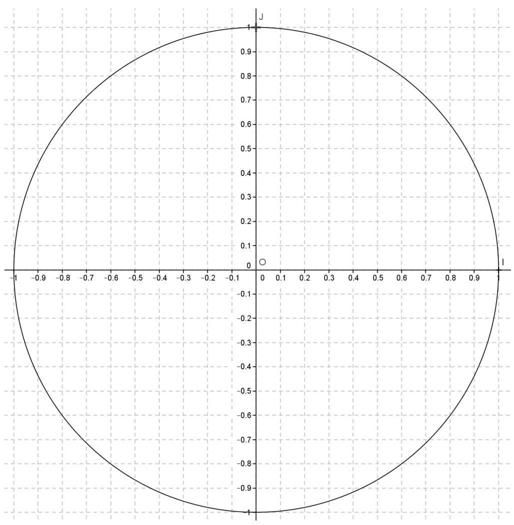
Considérons un repère du plan dont l'unité de graduation est la même sur les deux axes qui sont perpendiculaires. Un tel repère est appelé un *repère orthonormé.*

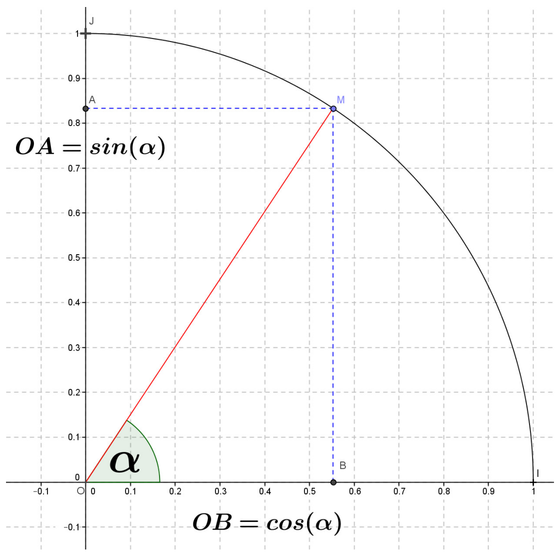
Le point O est l'origine du repère. Ses coordonnées sont $O(0;0)$

Le point I est le point unitaire sur l'axe des abscisses. Ses coordonnées sont $I(1;0)$.

Le point J est le point unitaire sur l'axe des ordonnées. Ses coordonnées sont $J(0;1)$.

Un tel repère est un repère orthonormé $(O;I;J)$.Traçons dans ce repère le cercle de centre O et de rayon une unité.






Soit un point M de ce cercle, point aux coordonnées supérieures ou égales à 0. Un tel point appartient au quart de cercle de la figure de droite. Notons $x_M$ son abscisse et $y_M$ son ordonnée.

Soit $B(x_M;0)$ le point de l'axe des abscisses ayant la même abscisse que le point M

Soit $A(0;y_M)$ le point de l'axe des ordonnées ayant la même ordonnée que le point M.

Le triangle OMB est rectangle en B. OM = 1 et OA=MB.

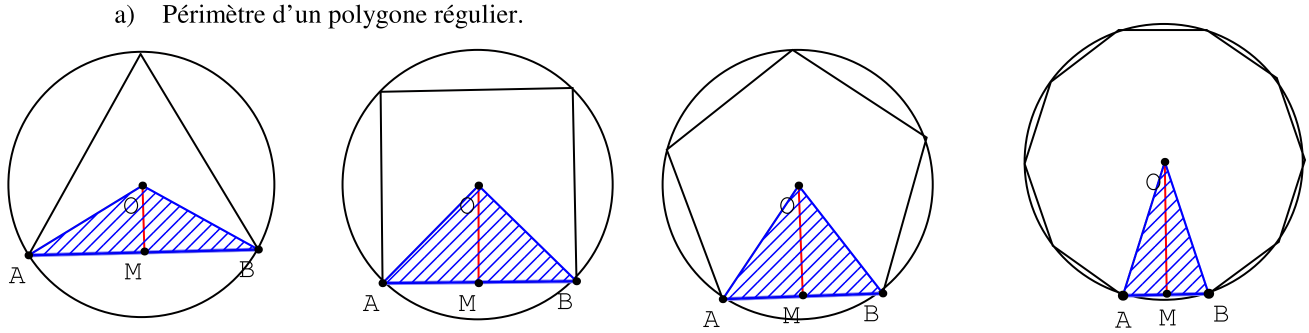
$\cos(\alpha)=\frac{OB}{OM}=\frac{OB}{1}=OB$. $\sin(\alpha)=\frac{BM}{OM}=\frac{OA}{1}=OA$.

Conclusion : Les coordonnées du point M sont le cosinus et le sinus de l'angle $\alpha$.
Pour cette raison, ce quart de cercle est appelé « Quart de cercle trigonométrique ». Il sera étendu au cercle entier dans les classes supérieures.

## 6. Exercices diverse.

### 1. Du sinus vers π :

a) Périmètre d'un polygone régulier.




Voici une série de polygones réguliers : 3 ; 4 ; 5 et 10 côtés. AB sont deux sommets consécutifs et M est le milieu du côté [AB]. OA = R

Notons par R leur rayon et exprimons leur périmètre en fonction de R.

* Comme A et B sont des points du cercle : OA = OB : les triangles OAB sont isocèles en O.
* OM, médiane du triangle issu de son sommet principal, est donc aussi bissectrice et hauteur : les triangles OMA sont tous rectangles en M.
* L'angle $A\hat{O}B$ mesure $\dfrac{360°}{nombre.de.côtés}$ et $A\hat{O}M$ vaut la moitié de $A\hat{O}B$.

* Dans AOM :

$$\sin\left(A\hat{O}M\right)=\frac{MA}{R}\Rightarrow MA=R\times\sin\left(A\hat{O}M\right)\Rightarrow AB=2\times R\times\sin\left(A\hat{O}M\right)=2R\sin\left(A\hat{O}M\right)$$

* Finalement : le périmètre vaut dans chaque cas :

$$P=nombre.de.côtés\times 2R\sin\left(A\hat{O}M\right)$$

* Tableau pour différents nombres de côtés.

| n | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A\hat{O}B$ | 120 | 90 | 72 | 36 | 18 | 6 |
| $A\hat{O}M$ | 60 | 45 | 36 | 18 | 9 | 3 |
| P | $3\times 2R\sin(60°)$ | $4\times 2R\sin(45°)$ | $5\times 2R\sin(36°)$ | $6\times 2R\sin(18°)$ | $20\times 2R\sin(9°)$ | $60\times 2R\sin(3°)$ |

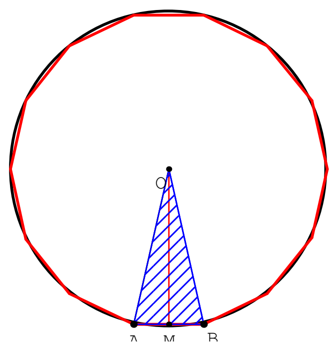
b) Notons par $n$ le nombre de côtés : il vient $A\hat{O}B=\dfrac{360°}{n}.et.A\hat{O}M=\dfrac{A\hat{O}B}{2}=\dfrac{360°}{n}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{360°}{2n}=\dfrac{180°}{n}$

$$P=n\times 2R\times\sin\left(\frac{180}{n}\right)$$

c) Plus le nombre de côté est grand, plus le polygone régulier devient proche d'un cercle.

or : le périmètre d'un cercle vaut $2\pi R$.

Conséquence : Plus n augmente, plus $P=n\times 2R\times\sin\left(\dfrac{180}{n}\right)$ se rapproche de $2\pi R$



Ce qui impose que $n\sin\left(\frac{180}{n}\right)$ se rapproche de plus en plus de $\pi$ lorsque n augmente.

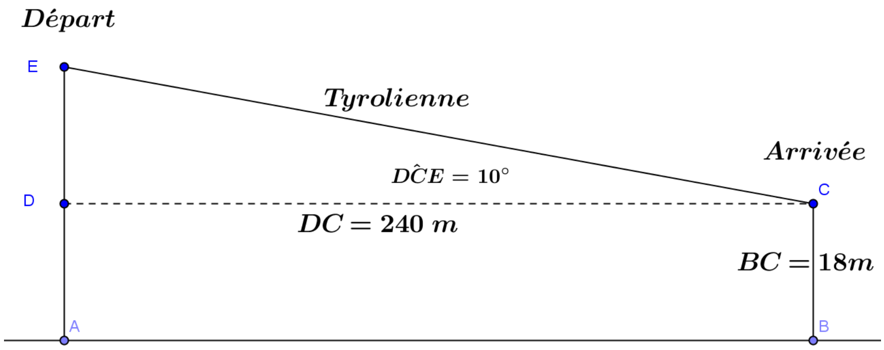
Le tableau donne la valeur de $n\sin\left(\frac{180}{n}\right)$ ainsi que l'écart par rapport à $\pi$ au millionième près.

| n | 10 | 20 | 100 | 200 | 250 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| nsin(180/n) | 3,090170 | 3,128689 | 3,141076 | 3,141463 | 3,141510 | 3,141572 |
| Ecart à Pi | 0,051423 | 0,012903 | 0,000516 | 0,000129 | 0,000082 | 0,000020 |

## 7. Exercices tangentes :

a. Un câble de tyrolienne est tendu entre le sommet de 2 arbres, sommets représentés par les points E et C sur le schéma ci-contre.
A et B représentent les pieds des arbres.

[EA] et [CB] sont perpendiculaires au sol horizontal représenté par (AB).
[DC] est parallèle à (AB).

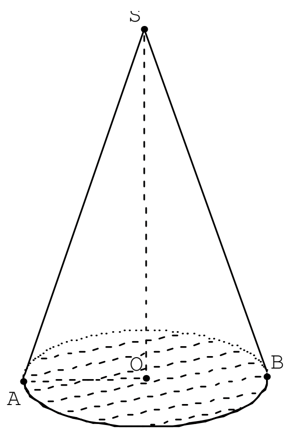



Calculer la hauteur de l'arbre, c'est-à-dire la longueur EA, au 1/10 de mètre près.

$D \in [EA] \Rightarrow EA = ED + DA$. Il est trivial de démonter que EDC est un triangle rectangle en D.

$$\tan(24°) = \frac{ED}{DC} = \frac{ED}{240} \Rightarrow ED = 240\tan(10°)m \approx 42,3m$$
$$EA = ED + DA \approx 18 + 42,3$$
$$EA \approx 60,3m$$

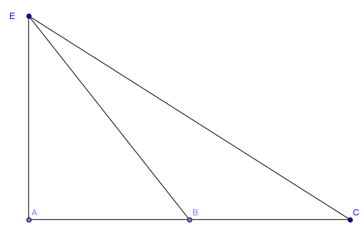
b. Le cône du schéma ci-contre a un rayon de 6 cm. L'angle $A\hat{S}O$ mesure 20°
Calculer le volume du cône au $cm^3$ près




$$V = \frac{\pi \times OA^2 \times SO}{3} \ldots\ldots \tan(20°) = \frac{OA}{SO} = \frac{6}{SO} \Rightarrow SO = \frac{6}{\tan(20°)} cm.$$
$$V = \frac{\pi \times OA^2 \times SO}{3} = \frac{\pi \times OA^2}{3} \times SO = \frac{\pi \times 6^2}{3} \times \frac{6}{\tan(20°)}$$
$$V = \frac{\pi \times 6^2 \times 6}{3 \times \tan(20°)} cm^3 = \frac{72\pi}{\tan(20°)} cm^3 \approx 621.cm^3$$

c. EAC est un triangle rectangle. B est un point de [AC].
On sait que $\tan(A\hat{E}B) = 1$ et que la tangente de l'angle $A\hat{E}C$ vaut le double de celle de l'angle $A\hat{E}B$.

* Quelle est la mesure de l'angle $A\hat{E}B$ ?




$$A\hat{E}B = \tan^{-1}(1) = 45°$$

*Quelle est la mesure de l'angle $A\hat{E}C$ au degré près ?

$$A\hat{E}C = \tan^{-1}(2) \approx 63°$$

Attention : ce n'est pas parce que la tangente double que l'angle double ! Ce serait d'ailleurs ridicule car l'angle $A\hat{E}C$ serait alors de 90° est le triangle aurait alors deux côtés parallèles.