Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Présentation de la problématique.

1. Test d'embauche.

Tu postules à un emploi d'été dans un bar. Il te faut vraiment la place pour pouvoir t'offrir ce dont tu rêves, tes premières vacances avec tes amis.

Mais voilà : tu n'es pas le seul dans ton cas…25 jeunes comme postulent. Alors le patron propose un test de sélection : seuls seront retenus les 5 candidats qui résoudront ce problème en une minute ou moins, sans calculatrice.

Table n°1 : 3 sodas et 4 cafés. L'addition est de 12 €.

Table n°2 : 5 sodas et 4 cafés. L'addition est de 16 €.

Table n°3 : 2 sodas et 1 café. Quel est le montant de l'addition ?

Tu as 1 minute maximum.

2. Le problème :

Pour réussir, il faut trouver le prix d'un soda et le prix d'un café. Tu as donc deux inconnues à trouver.

Pour ce faire, tu disposes de deux informations essentielles : les additions des tables n°1 et n°2.

Si on note s le prix d'un soda et c celui d'un café, la traduction mathématique des additions des deux tables donne:

Table n°1 : $3s + 4c = 12$
Table n°2 : $2s + 4c = 16$

Et ces deux équations doivent être vérifiées en même temps ! Car…

- Plusieurs (une infinité) couples (s, c) sont solutions pour la table n°1 :
  Regardons le petit tableau suivant donnant différentes valeurs pour s et c.

s	c	3s	4c	3s+4c
1	2,25	3	9	12
1,6	1,8	4,8	7,2	12
2,2	1,35	6,6	5,4	12
2,8	0,9	8,4	3,6	12
3	0,75	9	3	12

- Mais prenons ces valeurs pour calculer l'addition de la table n°2 :

s	c	5s	4c	5s+4c
1	2,25	5	9	14
1,6	1,8	8	7,2	15,2
2,2	1,35	11	5,4	16,4
2,8	0,9	14	3,6	17,6
3	0,75	15	3	18

Aucune ne donne une addition de 16 € !

- C’est pourquoi on parle de SYSTEME DE 2 EQUATIONS.
  L’une ne va pas sans l’autre, elles ne sont pas séparables.

  Pour les lier, les mathématiciens utilisent dans leur présentation des accolades.

  $$\begin{cases} 3s+4c=12 \\ 5s+4c=16 \end{cases}.$$

- Et pour ne pas se mélanger, ils numérotent les équations, à l’image des tables des bars et restaurants qui elles-aussi portent un n°.

  $$\begin{cases} 3s+4c=12....(1) \\ 5s+4c=16....(2) \end{cases}$$

3. Solution du test :

Tu as bien sûr trouvé que l’addition de la table n°3 était de 5,50 €, n’est-ce pas ? Certains diront même que c’est évident…

En effet :

La table n°2 prend 2 sodas de plus que la n°1 et elle paie 4 € de plus : un soda coûte donc 2 €.

Les 3 sodas de la table n°1 coûtent donc $3\times 2=6$ €.

Les 4 cafés coûtent en conséquence $12-6=6$ €.
Un café coûte donc $\frac{6}{4}=1{,}5$ €.

Nous allons vérifier si ces 2 valeurs sont solutions pour les additions des deux tables.

Table n°1 : $3\times 2+4\times 1{,}5=6+6=12$ €.
Table n°2 : $5\times 2+4\times 1{,}5=10+6=16$ €.

L’addition de la 3 est bien de : $2\times 2+1{,}5=4+1{,}5=5{,}5$ €.

4. Pourquoi système de 2 équations <u>du 1^er^ degré</u> à deux inconnues ?

Deux inconnues, c’est vu.
Deux équations, c’est vu.
Pourquoi 1er degré ?

Le degré d’une équation est la puissance maximale des inconnues.
Dans $\begin{cases} 3s+4c=12....(1) \\ 5s+4c=16....(2) \end{cases}$, les variables s et c sont à la puissance 1 : $\begin{cases} 3s+4c=3s^1+4c^1 \\ 5s+4c=5s^1+4c^1 \end{cases}$.

En troisième, tu as rencontré des équations du second degré : celles de la forme $x^2=a$.

Résolution par la méthode de combinaison linéaire.
(Méthode d'élimination.)

1. Principe : Il est très simple. Il repose sur trois propriétés des égalités.

a. **Première propriété: Egalité et addition.**

Une égalité reste une égalité si on ajoute (ou retranche) un même terme à chacun de ses membres.

Si $a = b$, alors $a + c = b + c$

Démo : supposons que a = b. Etudions alors la différence (a + c) – (b + c).

(a + c) – (b + c) = a + c – b – c = a – b = 0 car d'après les hypothèses, a = b.

Or : (a + c) – (b + c) = 0 implique que (a + c) = (b + c). En effet, seule la différence de 2 nombres égaux donne 0.

b. **Propriété n°2 : Egalité et addition, suite.**

On peut ajouter ou soustraire membre à membre les termes de 2 égalités, le résultat est toujours une égalité.

Si $a = b$ et si $c = d$, alors $a + c = b + d$ de même que $a - c = b - d$

(démo identique à n°1 : étudier la différence des membres de chaque égalité conclusion proposée.)

c. **Exemple d'utilisation de cette propriété dans le cadre de la résolution de système.**

Dans toute la suite de ce chapitre, nous appellerons coefficients les nombres qui multiplient les inconnues dans les équations.

Soit le système $\begin{cases} 3x + 2y = 5 ...(1) \\ 2x + 2y = 2 ...(2) \end{cases}$

Les coefficients des inconnues x et y sont respectivement de 3 et 2 dans la première équation et de 2 et 2 dans la seconde.

L'observation des coef de l'inconnue y montre qu'ils sont égaux. **Très pratique !**

Notons comme dans toute la suite de l'exposé :

MG1 le membre gauche de l'égalité n°1 :	$3x + 2y$.
MD1 son membre de droite :	*5*
MG2 le membre de gauche de l'égalité n°2:	$2x + 2y$
MD2 son membre de droite :	*2*

L'utilisation de la propriété n°2 conduit à :

MG1-MG2 = MD1 – MD2 soit :

$$\begin{aligned}&(3x+2y)-(2x+2y)=5-2\\&3x+2y-2x-2y=3\\&x=3\end{aligned}$$

(Remarque : on peut noter que l'on fait (1) – (2) membre à membre, d'où l'intérêt de numéroter les équations.)

Essentiel : la soustraction membre à membre a permis d'éliminer la présence de l'inconnue y car leur coefficient sont égaux.

Maintenant que nous avons $x=3$, il suffit de remplacer x par 3 dans l'équation n°1 ou n°2, peu-importe : les deux donneront la même solution pour y.

* remplacement dans n°1 : $$\begin{aligned}&3x+2y=5\\&3\times3+2y=5\\&9+2y=5\\&2y=5-9=-4\\&y=\frac{-4}{2}=-2\end{aligned}$$

* dans n°2 : $$\begin{aligned}&2x+2y=2\\&2\times3+2y=2\\&6+2y=2\\&2y=2-6=-4\\&y=\frac{-4}{2}=-2\end{aligned}$$

* Reste à vérifier que le couple $(x;y)=(3;-2)$ est bien le couple solution du système en remplaçant x par 3 et y par -2 dans chacune des équations puis de faire les calculs.

Si $(x;y)=(3;-2)$: $\begin{cases}3x+2y=3\times3-2\times2=9-4=5...(1)\\2x+2y=2\times3-2\times2=6-4=2...(2)\end{cases}$

Conclusion : le couple $(x;y)=(3;-2)$ est bien le couple solution du système $\begin{cases}3x+2y=5...(1)\\2x+2y=2...(2)\end{cases}$

d. **Autre exemple d'utilisation : en passant par une addition.**

Soit le système $\begin{cases}-2x+4y=-11..(1)\\ \quad 2x+y=1...(2)\end{cases}$

L'analyse des coefficients montre que ceux des x sont opposés. Bien pratique aussi, car la somme de deux opposés est égale à 0 !

MG1+MG2= MD1+MD2

$$\begin{aligned}&(-2x+4y)+(2x+y)=-11+1\\&-2x+4y+2x+y=-10\\&5y=-10\\&y=\frac{-10}{5}=-2\end{aligned}$$

(Remarque : on peut noter que l'on fait (1) + (2) membre à membre, d'où l'intérêt de numéroter les équations.)

Essentiel : l'addition membre à membre a permis d'éliminer la présence de l'inconnue x car leur coefficient étaient opposés.

Maintenant que nous avons $y=-2$, il suffit de remplacer y par -2 dans l'équation n°1 ou n°2, peu-importe : les deux donneront la même solution pour y.

* remplacement dans n°1 :

$$\begin{aligned}&-2x+4y=-11\\&-2x+4\times(-2)=-11\\&-2x-8=-11\\&-2x=-11+8=-3\\&x=\frac{-3}{-2}=1{,}5\end{aligned}$$

* dans n°2 :

$$\begin{aligned}&2x+y=1\\&2x-2=1\\&2x=1+2\\&2x=3\\&x=\frac{3}{2}=1{,}5\end{aligned}$$

* Reste à vérifier que le couple $(x;y)=(1{,}5;-2)$ est bien le couple solution du système en remplaçant x par -1,5 et y par -2 dans chacune des équations puis de faire les calculs.

Si $(x;y)=(3;-2)$: $\begin{cases}-2x+4y=-2\times1{,}5+4\times(-2)=-3-8=-11...(1)\\ 2x+y=2\times1{,}5+(-2)=3-2=1...(2)\end{cases}$

Conclusion : le couple $(x;y)=(1{,}5;-2)$ est bien le couple solution du système $\begin{cases}-2x+4y=-11..(1)\\ 2x+y=1...(2)\end{cases}$

e. **Propriété n°3 : Egalité et multiplication.**

Une égalité reste une égalité si on multiplie (ou divise) chacun de ses membres par un même facteur différent de zéro.

Si $a=b$, alors $a\times k=b\times k$

Démo : Supposons que a = b. Etudions alors la différence $ak-bk$.

$ak-bk=k(a-b)=k\times 0=0$ car d'après les hypothèses, a = b.

Or : $ak-bk$ implique que $ak=bk$ En effet, seule la différence de 2 nombres égaux donne 0.

f. **Utilisation des propriétés n°2 et 3 :** Soit le système suivant : $\begin{cases} 4x-3y=-2...(1) \\ 2x+4y=14...(2) \end{cases}$

Nous avons vu précédemment qu'il était bien pratique d'avoir des coefficients égaux ou opposés pour une même inconnue dans chacune des équations.

Pour x nous avons des coefficients de 4 et 2. Très pratique car le double de 2 vaut 4 !

Nous allons **modifier** le système en multipliant les deux membres de l'équation n°2 par 2.

Le système sera autre mais, compte-tenu des propriétés des égalités, aura les mêmes solutions.

$$\begin{cases} 4x-3y=-27...(1) \\ 2x+4y=14...(2)\times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y=-27....(1) \\ 4x+8y=28....(2) \end{cases}$$

Maintenant que les coefficients des x sont égaux, il est facile d'annuler leur présence en faisant une soustraction membre à membre. (Nombre égaux donc soustraction pour avoir zéro.)

Problème : laquelle ? (1) – (2) ou (2) – (1) ?

Les deux donneront la même solution. A vous de voir celle qui vous semble la plus simple !

(1) – (2) donne :

$$\begin{aligned} &(4x-3y)-(4x+8y)=-27-28 \\ &4x-3y-4x-8y=-55 \\ &-11y=-55 \\ &y=\frac{-55}{-11}=5 \end{aligned}$$

(2) – (1) donne :

$$\begin{aligned} &(4x+8y)-(4x-3y)=28-(-27) \\ &4x+8y-4x+3y=28+27 \\ &11y=55 \\ &y=\frac{55}{11}=5 \end{aligned}$$

Attention à $-(-27)$

Maintenant que y est trouvé, reste à trouver x. On remplace y par 5 dans n'importe quelle équation, on trouvera la même valeur. Nous allons le faire avec les deux pour t'en convaincre. Dans la pratique, ne le faire qu'une fois en prenant l'équation qui semble la plus simple.

$4x-3y=-27$ et remplaçons y par 5 :

$$\begin{aligned} &4x-3\times 5=-27 \\ &4x-15=-27 \\ &4x=-27+15=-12 \\ &x=\frac{-12}{4}=-3 \end{aligned}$$

$2x+4y=14$ et remplaçons y par 5 :

$$\begin{aligned} &2x+4\times 5=14 \\ &2x+20=14 \\ &2x=14-20=-6 \\ &x=-\frac{6}{2}=-3 \end{aligned}$$

Vérification : pour $x=-3$ et $y=5$

$$\begin{cases} 4x-3y=4\times(-3)-3\times 5=-12-15=-27...(1) \\ 2x+4y=2\times(-3)+4\times 5=-6+20=14...(2) \end{cases}$$

Conclusion : le couple $(x;y)=(-3;5)$ est le couple solution du système $\begin{cases} 4x-3y=-2...(1) \\ 2x+4y=14...(2) \end{cases}$

2. Résumé de la méthode de combinaison linéaire. Stratégie.

Soit un système se présentant sous la forme $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \text{...(1)} \\ a_2x+b_2y=c_2 \text{...(2)} \end{cases}$

a. Analyser les coefficients des inconnues. Si coefficients égaux ou opposés.

Si $a_1=a_2$: on peut directement éliminer les x par une **soustraction** membre à membre.
On trouve alors y.
On utilise cette valeur pour trouver x.
on vérifie et on conclue.

Si $b_1=b_2$: on peut directement éliminer les y par une **soustraction** membre à membre.
On trouve alors x.
On utilise cette valeur pour trouver y.
On vérifie et on conclue.

Si $a_1=-a_2$: on peut directement éliminer les x par une **addition** membre à membre.
On trouve alors y.
On utilise cette valeur pour trouver x.
on vérifie et on conclue.

Si $b_1=-b_2$: on peut directement éliminer les y par une **addition** membre à membre.
On trouve alors x.
On utilise cette valeur pour trouver y.
On vérifie et on conclue.

b. Si pas le cas : la plupart du temps il existe un nombre facile à trouver par lequel multiplier les deux membres d'une équation pour avoir un couple de coefficients égaux ou opposés sur une des deux inconnues. On retombe alors sur le cas a).

c. Si ce nombre ne saute pas aux yeux : multiplier chaque équation par le coefficient des x ou des y de l'autre équation comme dans l'exemple ci-dessous :

$\begin{cases} 2x-3y=0\text{......}(1) \\ 3x+5y=19\text{.....}(2) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3y=0\text{......}(1)\times 3 \\ 3x+5y=19\text{.....}(2)\times 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x-9y=0\text{......}(1) \\ 6x+10y=38\text{.....}(2) \end{cases}$

On multiplie (1) par le coefficient des x de (2)
On multiplie (2) par le coefficient des x de (1)

Ainsi : on obtient un système dans lequel les coefficients des x sont égaux.
A toi de finir pour trouver le couple solution $(x;y)=(3;2)$.

d. Remarque : On peut éliminer chacune leur tour les deux inconnues comme dans cet exemple.

$$\begin{cases} 3x - y = -6{,}6....(1) \\ x + 2y = 4{,}1....(2) \end{cases}$$

Elimination des x
On égalise les coef. des x.
On soustrait alors (2) et (1)
On trouve ainsi y.

$$\begin{cases} 3x - y = -6{,}6....(1) \\ x + 2y = 4{,}1....(2) \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = -6{,}6....(1) \\ 3x + 6y = 12{,}3....(2) \end{cases}$$

(2) – (1) donne :

$$(3x + 6y) - (3x - y) = 12{,}3 - (-6{,}6)$$
$$3x + 6y - 3x + y = 12{,}3 + 6{,}6$$
$$7y = 18{,}9$$
$$y = \frac{18{,}9}{7} = 2{,}7$$

Elimination des y.
On oppose les coef. des y.
On additionne alors (1) et (2)
On trouve ainsi x.

$$\begin{cases} 3x - y = -6{,}6....(1) \times 2 \\ x + 2y = 4{,}1....(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 2y = -13{,}2....(1) \\ x + 2y = 4{,}1....(2) \end{cases}$$

(1) + (2) donne :

$$(6x - 2y) + (x + 2y) = -13{,}2 + 4{,}1$$
$$6x - 2y + x + 2y = -9{,}1$$
$$7x = -9{,}1$$
$$x = -\frac{9{,}1}{7} = -1{,}3.$$

Vérification et conclusion laissées aux soins du lecteur.

3. Exemples : on appellera (1) l'équation du haut et (2) celle du bas.

a. $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Analyse des coeff : on peut multiplier l'équation (2) par 3

$$\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

Coeff égaux sur les x. On fait (1) – (2) et élimination des x.

$$(3x - 2y) - (3x + 3y) = -12 - 3$$
$$3x - 2y - 3x - 3y = -15$$
$$-5y = -15$$
$$y = \frac{-15}{-5} = 3$$

On trouve y que l'on reporte dans (2) (le plus simple).

$$x + 3 = 1$$
$$x = 1 - 3$$
$$x = -2$$

On trouve x. Il faut vérifier et conclure.

Si $x = -2$ et $y = 3$:

$$3x - 2y = 3 \times (-2) - 2 \times 3 = -6 - 6 = -12$$
$$x + y = -2 + 3 = 1$$

Conclusion : le couple $(x; y) = (-2; 3)$ est solution du système.

b. $\begin{cases} -4x+3y=3....(1)\times 2 \\ 2x-6y=-3....(2) \end{cases}$. Analyse: multiplions (1) par 2 pour avoir les coeff des y opposés.

$\begin{cases} -8x+6y=6....(1) \\ 2x-6y=-3....(2) \end{cases}$ Coeff opposés sur y : on fait (1) + (2) pour éliminer y et trouver x

$$(-8x+6y)+(2x-6y)=6+(-3)$$
$$-8x+6y+2x-6y=6-3$$
$$-6x=3$$
$$x=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

Report dans une équation. Par exemple, la n° (2).

Si $x=-\frac{1}{2}$: l'équation n° (2) donne :

$$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-6y=-3$$
$$-1-6y=-3$$
$$-6y=-3+1$$
$$-6y=-2$$
$$y=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

:

Vérification et conclusion : pour $x=-\frac{1}{2}$ et $y=\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} -4x+3y=-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\times\frac{1}{3}=2+1=3 \\ 2x-6y=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-6\times\frac{1}{3}=-1-2=-3 \end{cases}$$

Le couple $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ est solution.

c. $\begin{cases} 5x-4y=8.....(1) \\ x+y=-1{,}5.....(2) \end{cases}$.

$\begin{cases} x-y=\frac{20}{21}.....(1) \\ x+y=-\frac{8}{21}.....(2) \end{cases}$

Tu dois trouver $(x;y)=(2{,}8;-1{,}5)$

Tu dois trouver $(x;y)=\left(\frac{2}{7};-\frac{2}{3}\right)$.

Résolution par la méthode de substitution.

1. Pré-requis : ce qu'il faut savoir avant. Exprimer une variable en fonction d'une autre.

Tu as en fait déjà rencontré cette compétence bien des fois.

Quand deux (ou plus) nombres sont liés entre eux par une relation numérique, chacun d'entre eux dépend des autres.

Exemple: supposons que tu travailles cet été comme vendeur et que ton salaire dépende du nombre d'heures que tu fais mais aussi du montant des ventes que tu réalises.

Supposons même que tu gagnes 5 € par heure auxquels se rajoutent 10 % du montant des ventes que tu fais.

Notons par t le nombre d'heures que tu travailles, par C le chiffre d'affaire que tu réalises pendant ce temps et par S ton salaire correspondant.

On a alors : $S = 5t + \frac{10}{100}C = 5t + 0{,}1C$

Maintenant, il te faut gagner 1 800 € si tu veux pouvoir te payer tes vacances de rêves avec tes copains le mois suivant. Comment peux-tu prévoir ton planning ? De quoi va-t-il dépendre ?

Tu as à prévoir ton travail avec comme base de prévision : $5t + 0{,}1C = 1800$

- **Si tu ne peux bosser qu'à mi-temps 4 h par jour 5 jour par semaine et 4 semaines:**

  $t = 4 \times 5 \times 4 = 80h$

  Tu gagnes alors $80 \times 5 = 400$ €

  Il t'en faut encore 1 800 – 400 = 1 400 qui correspondent aux 10% de tes ventes C.

  Celles-ci doivent alors être de : 14 000 €.

- **Si tu peux bosser 7 heures par jour et 6 jours par semaine pendant 6 semaines :**

  $t = 7 \times 6 \times 6 = 252$ h. Tu gagnes déjà : $252 \times 5 = 1\,260$ €.

  Il t'en faut encore 1 800 – 1 260 =540

  Soit un chiffre d'affaire minimum de 5 400 €.

  Dans les deux cas ci-dessus : tu fais le même calcul pour trouver le chiffre d'affaire à réaliser à partir du nombre d'heure travaillées :

$$C = \frac{1800 - 5t}{0{,}1} = 18000 - 50t$$

- Comment trouve-t-on ceci simplement ? A partir de $5t+0{,}1C=1800$

$$5t+0{,}1C=1800$$
$$5t+0{,}1C-5t=1800-5t$$
$$0{,}1C=1800-5t$$
$$\frac{0{,}1C}{0{,}1}=\frac{1800-5t}{0{,}1}$$
$$C=\frac{1800-5t}{0{,}1}=18000-50t$$

On enlève 5t à chaque membre. Puis on divise chaque membre par 0,1. C'est-à-dire : multiplier par son inverse : 10

- **Vocabulaire : Exprimer une variable en fonction d'une autre :**

  Quand on passe de $5t+0{,}1C=1800$ à $C=18000-50t$, tu exprimes C en fonction de t.

- ***Remarque :*** *Si on se place du côté de l'employeur, le jeune de la première situation est de loin le plus intéressant ! Car il rentre dans les caisses de la boîte 90 % des ventes moins le salaire payé, soit :*

  Jeune n°1 : $0{,}9\times 14000-400=12600-400=12200$ €
  Jeune n°2 : $0{,}9\times 5400-1260=4860-1260=3600$ €

  Si nous prenons une situation plus réaliste en nous plaçant du point de vue de l'employeur qui impose à son jeune que celui-ci apporte effectivement dans les caisses de la boîte 10 000 €, une fois son salaire déduit…

  On arrive alors à ceci : Le chiffre d'affaire réalisé doit être tel que : $0{,}9C-5t=10000$

  On arrive alors à un splendide système dans lequel chaque protagoniste est présent :

$$\begin{cases}0{,}1C+5t=1800..........(l'employé)\\0{,}9C-5t=10000.....(l'employeur)\end{cases}$$

  Je te laisse résoudre ce système qui aboutit à : C =11 800 € et t = 124 h.

2. Méthode pour exprimer une variable en fonction d'une autre :

a. L'important : analyse des priorités opératoires.

Si dans l'écriture $5t+0{,}1C$, on veut exprimer C en fonction de t : il faut « supprimer » l'action de 5t et de 0,1 pour isoler C.

Comme il n'y a pas de parenthèse : le facteur 0,1 est prioritaire sur le terme 5t.

Il faut annuler en 1er celui qui est actif en dernier : il faut neutraliser + 5t en l'enlevant. Il reste 0,1C.

Il faut alors neutraliser le facteur 0,1 en divisant par 0,1.

On obtient le résultat.

Et comme tu le sais, tout ce qui est fait à un membre doit être fait à l'autre, d'où :

$$5t+0{,}1C=1800$$
$$5t+0{,}1C-5t=1800-5t$$
$$0{,}1C=1800-5t$$
$$\frac{0{,}1C}{0{,}1}=\frac{1800-5t}{0{,}1}$$
$$C=\frac{1800-5t}{0{,}1}$$

b. Exemples diverses : exprimons à chaque fois y en fonction de x.

$x+y=5$ — Cas simple : terme + x à soustraire

$y=5-x$

$x-y=3$ — Etape n°1 : + x à soustraire.

$-y=3-x$ — Attention : résultat : - y

$y=-(3-x)$ — Etape n°2 : neutralisation du facteur -1

$y=-3+x$

$x+2y=-8$ — Facteur 2 prioritaire donc…

$2y=-8-x$ — terme x à enlever.

$y=\frac{-8-x}{2}$ — Puis neutralisation du facteur 2

$y=\frac{-8}{2}-\frac{x}{2}$ — Simplification de l'écriture.

$y=-4-\frac{x}{2}$

$5(2x+y)=10$ — Priorité au + car parenthèses

$2x+y=\frac{10}{5}=2$ — Donc neutralisation du facteur 5

$y=2-2x$ — Neutralisation du terme + $2x$

$-x-3y=6$ — Terme $-x$ à soustraire.

$-3y=6-(-x)$ — $-(-x)=+x$

$-3y=6+x$ — Division par -3

$y=\frac{6+x}{-3}=-2-\frac{x}{3}$

c. Utilisation pour résoudre un système :

$$\begin{cases} 3x-y=-6{,}6....(1) \\ x+2y=4{,}1....(2) \end{cases}$$

Si on regarde de près ce système : on remarque qu'il est très simple d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre : en effet, le coefficient des x est égal à 1 dans l'équation n°(2).

Exprimons x en fonction de y à partir de (2): $x+2y=4{,}1 \Rightarrow x=4{,}1-2y$.

Maintenant, remplaçons x par $4{,}1-2y$ **dans l'équation n°1 :**

$3x-y=-6{,}6$ devient alors :

$3(4{,}1-2y)-y=-6{,}6$ — Equation du 1er degré à une inconnue, programme de 4ème.

$3\times 4{,}1-3\times 2y-y=-6{,}6$

$12{,}3-6y-y=-6{,}6$ — Développement et réduction.

$12{,}3-7y=-6{,}6$

$-7y=-6{,}6-12{,}3$ — Neutralisation du terme 12,3

$-7y=-18{,}9$

$y=\frac{-18{,}9}{-7}=2{,}7$ — Résolution de y.

Comme $y = 2{,}7$: on retourne dans $x = 4{,}1 - 2y$, résultat de l'expression de x en fonction de y et on fait le calcul en prenant $y = 2{,}7$.

$x = 4{,}1 - 2y \Rightarrow x = 4{,}1 - 2 \times 2{,}7 = 4{,}1 - 5{,}4 = -1{,}3$.

Faire la vérification et conclure : le couple $(x; y) = (-1{,}3; 2{,}7)$ est solution du système.

Attention :

Nous avons choisi d'exprimer x en fonction de y à partir de **(2)** : $x + 2y = 4{,}1 \Rightarrow x = 4{,}1 - 2y$.
Une fois ceci fait, il faut remplacer x par $4{,}1 - 2y$ dans l'équation **(1)** : surtout pas dans la (2).

Si nous remplaçons dans la (2), nous obtenons:

$$x + 2y = 4{,}1$$
$$(4{,}1 - 2y) + 2y = 4{,}1$$
$$4{,}1 - 2y + 2y = 4{,}1$$
$$4{,}1 = 4{,}1$$

La belle affaire….nous voilà coincé pour la suite !

Explication : $x + 2y = 4{,}1$ *et* $x = 4{,}1 - 2y$ *sont deux formes différentes de la même équation. Si un couple (x ; y) est solution de la première forme, il est évidemment solution de la seconde forme. Cette évidence se traduit par l'évidence 4,1=4,1. Voir paragraphe 6 de cette section.*

Règle de base : Si on exprime une inconnue en fonction d'une autre à partir d'une équation, il faut impérativement faire la substitution dans l'autre équation !

3. Descriptif général de la méthode de substitution.

Etape 1 : analyser les équations et choisir d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une équation (4 cas possibles. Choisir le plus simple).

Etape 2 : aller dans l'autre équation et remplacer l'inconnue exprimée par son expression en fonction de l'autre.

Etape 3 : Développer et réduire puis résoudre l'équation.

Etape 4 : Revenir à l'étape n°1. injecter la valeur trouvée en étape n°3 pour trouver la seconde inconnue.

Etape 5 : vérifier et conclure.

4. Exemples :

Exemple n°1 : $\begin{cases} -2x+4y=-11..(1) \\ 2x+y=1...(2) \end{cases}$

Etape 1 : $y=f(x)$ à partir de (2) car une seule étape : $2x+y=1 \Rightarrow y=1-2x$.

Etape 2 : Remplacer y par $1-2x$ dans l'équation n°1 :

$$-2x+4y=-11$$
$$-2x+4(1-2x)=-11$$

Etape 3 : Développement/réduction/résolution :

$$-2x+4-8x=-11$$
$$-10x+4=-11$$
$$-10x=-11-4=-15$$
$$x=\frac{-15}{-10}=1{,}5$$

Etape 4 : Retour à l'étape 1 et remplacement de x par 1,5 :

$$y=1-2x$$
$$y=1-2\times1{,}5$$
$$y=1-3$$
$$y=-2$$

Etape 5 : vérification et conclusion.

Si $(x;y)=(1{,}5;-2)$: $\begin{cases} -2x+4y=-2\times1{,}5+4\times(-2)=-3-8=-11 \\ 2x+y=2\times1{,}5-2=3-2=1 \end{cases}$

Conclusion: le couple $(x;y)=(1{,}5;-2)$ est solution du système $\begin{cases} -2x+4y=-11 \\ 2x+y=1 \end{cases}$.

Exemple n°2 : $\begin{cases} 10{,}5x+18y=12975..(1) \\ x+y=850..............(2) \end{cases}$

Etape n°1 : $\begin{cases} 10{,}5x+18y=12975 \\ x+y=850 \Rightarrow x=850-y \end{cases}$ $x=f(y)$ à partir de (2)

Etape n°2 : $\begin{cases} 10{,}5x+18y=12975 \Rightarrow 10{,}5\times(850-y)+18y=12975 \\ x=850-y \end{cases}$ Remplacement dans (1)

Etape n°3 : Résolution de l'équation en y.

$$10{,}5(850-y)+18y=12975$$
$$10{,}5\times850-10{,}5y+18y=12975$$
$$8925+7{,}5y=12975$$
$$7{,}5y=12975-8925$$
$$7{,}5y=4050$$
$$y=\frac{4050}{7{,}5}=540$$

Etape n°4 : $x = 850 - y$

$x = 850 - 540$

$x = 310$

Remplacement de y par sa valeur dans $x = f(y)$

Etape n°5 : Vérification et conclusion : pour $(x; y) = (310;540)$:

$$\begin{cases} 10,5x + 18y = 10,5 \times 310 + 18 \times 540 = 3255 + 9720 = 12975..(1) \\ x + y = 310 + 540 = 850...............(2) \end{cases}$$

Conclusion : le couple $(x; y) = (310;540)$ est solution du système $\begin{cases} 10,5x + 18y = 12975..(1) \\ x + y = 850...............(2) \end{cases}$

5. Quand faire cette méthode ?

A faire quand il est simple d'exprimer une inconnue en fonction d'une autre !

Ce qui est le cas quand une inconnue a pour coefficient 1 dans une des équations.

A toi de faire le tri dans tous les systèmes précédents et de les résoudre par substitution.
Je me tiens à ta disposition.

6. Des systèmes avec une infinité de solution. D'autres avec aucune solution.

a) Soit le « système » de deux équations suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases}$.

Un élève trop pressé arriverait à une impasse.
Soyons cet élève trop pressé qui appliquerait par exemple la méthode de combinaison sans prendre de recul.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4...(1) \times 2 \\ 6x + 4y = 8...(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 8...(1) \\ 6x + 4y = 8...(2) \end{cases}$$

Les coefficients sont égaux pour les deux inconnues. La combinaison (1)-(2) donne :

$(6x + 4y) - (6x + 4y) = 8 - 8$

$6x + 4y - 6x + 4y = 0 - 0$

$0 = 0$

On retombe sur une évidence qui traduit le fait que toute solution de l'équation n°1 est aussi solution de l'équation n°2.

C'était prévisible. Dans $\begin{cases} 3x + 2y = 4...(1) \\ 6x + 4y = 8...(2) \end{cases}$, l'équation (2) est une autre écriture de l'équation (1) : il s'agit simplement du double de l'équation (1).

Ce système n'en est en réalité pas un : il s'agit en fait d'un problème d'une équation à deux inconnues qui admet une infinité de solutions, tout couple $(x;y)$ de la forme $\left(x;y=\dfrac{4-3x}{2}\right)$

b) Soit le système suivant : $\begin{cases} 3x+2y=4...(1) \\ 6x+4y=1...(2) \end{cases}$

Là aussi, un élève trop pressé arriverait à une impasse. Vois-tu pourquoi ?

Soyons cet élève trop pressé qui appliquerait par exemple la méthode de combinaison sans prendre de recul.

$$\begin{cases} 3x+2y=4...(1)\times 2 \\ \quad 6x+4y=1...(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=8...(1) \\ 6x+4y=1...(2) \end{cases}$$

Les coefficients sont égaux pour les deux inconnues. La combinaison (1)-(2) donne :

$$\begin{aligned} &(6x+4y)-(6x+4y)=8-1 \\ &6x+4y-6x+4y=7 \\ &0=7 \end{aligned}$$

Nous aboutissons cette fois à une absurdité qui signifie que le système n'a pas de solution. C'était prévisible : $6x+4y$ ne peut pas être égal à 8 et à 1 en même temps.

Nous reparlerons de ces deux cas dans la méthode graphique.

Résolution graphique.

Cette méthode s'appuie sur tes connaissances sur les fonctions et sur leur courbe représentative.

Peut-être as-tu toi-même fait le lien entre système et fonction à partir du moment où tu as lu dans la méthode de substitution qu'il fallait exprimer une inconnue en fonction d'une autre.

Le principe est simple: à chaque équation correspond une fonction, donc une courbe.
Il te suffira de tracer les courbes de chaque fonction.
Les coordonnées du point d'intersection te donneront le couple solution du système.

Nous travaillerons 2 exemples.

Exemple n°1 : $\begin{cases} 3x+2y=5 ...(1) \\ 2x+2y=2 ...(2) \end{cases}$ déjà rencontré précédemment.

Tu sais que la notation x est réservée aux antécédents et que y est réservée aux images.
De même, tu sais que y est l'image de x. Si on appelle f_1 la fonction de variable x correspondant à l'équation n°1 et f_2 celle associée à l'équation n°2, on a :

$y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$

Ne reste plus qu'à trouver les 2 fonctions et tracer leur courbe représentative…

a) **Recherche des fonctions** : Il suffit pour cela d'exprimer y en fonction de x à partir de chaque équation.

Equation n°1 :

$$3x+2y=5$$
$$2y=5-3x$$
$$y=\frac{5-3x}{2}=\frac{-3x+5}{2}=-\frac{3x}{2}+2{,}5$$
$$f_1 : x \to -\frac{3x}{2}+2{,}5$$

Equation n°2 :

$$x+y=1$$
$$y=1-x=-x+1$$
$$f_2 : x \to -x+1$$

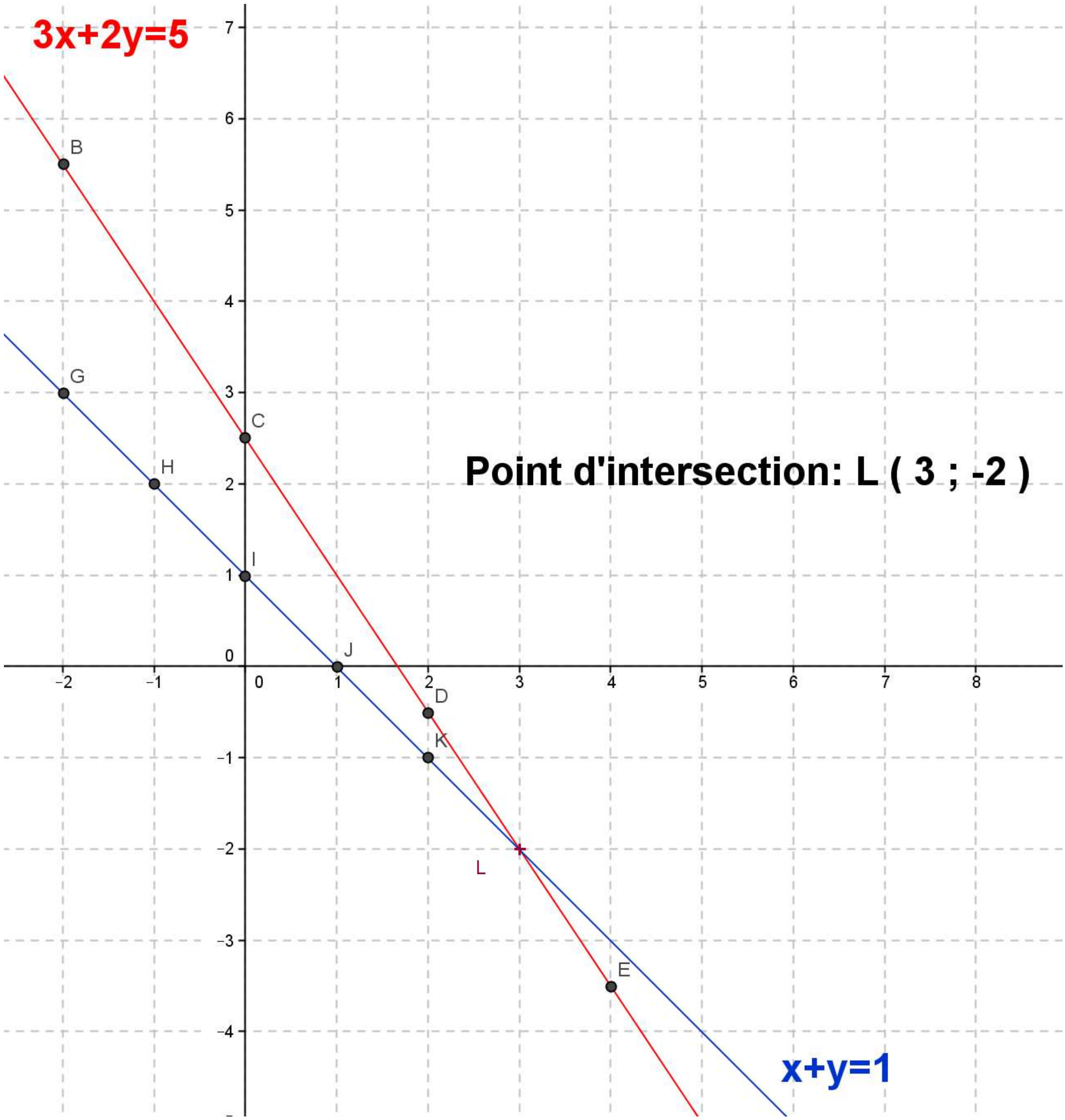
b) **Construction des courbes** : pour cela, il faut des points.

Rappel méthode : l'ordonnée est égale à l'image de l'abscisse.
On voit que pour f_1 : il faut diviser par 2. Il est pratique de ne choisir que des abscisses paires.

3 x + 2 y = 5: f_1(x)= - 3x/2 +2,5		
x	y=f_1(x)	Points
-2	5,5	(-2 ; 5,5)
0	2,5	(0 ; 2,5)
2	-0,5	(2 ; -0,5)
4	-3,5	(4 ; - 3,5)

x + y = 1: f_2(x) = -x+1		
x	y=f_2(x)	Points
-2	3	(-2 ; 3)
-1	2	(-1 ; 2)
0	1	(0 ; 1)
1	0	(1 ; 0)
2	-1	(2 ; -1)
3	-2	(3 ; -2)

c) **Construction des courbes** : placement des points.



d) **Conclusion**: L, le point d'intersection des deux courbes a pour coordonnées $L(3;-2)$.

Le couple solution du système est donc : $(x;y)=(3;-2)$. A toi de faire la vérification.

Exemple n°2 : $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \ldots (1) \\ 2x + y = 7 \ldots (2) \end{cases}$

Etape n°1 : recherche des fonctions.

$$-3x + 2y = 0$$
$$2y = 0 - 3x = -3x$$
$$y = -\frac{3x}{2}$$
$$f_1 : x \to -\frac{3x}{2}$$

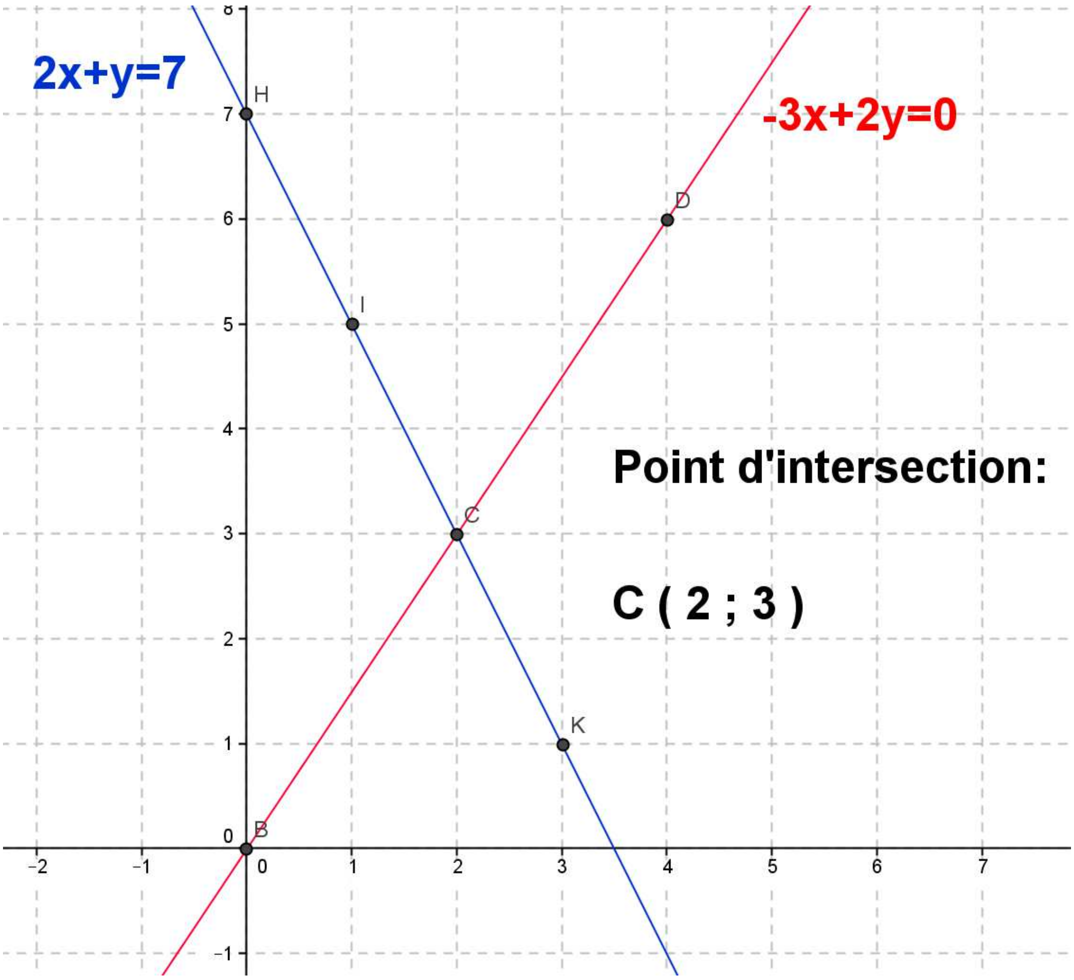
$$2x + y = 7$$
$$y = 7 - 2x$$
$$y = -2x + 7$$
$$f_2 : x \to -2x + 7$$

Etape n°2 : recherche de points.

- 3 x + 2 y = 0 f1(x) = -3 x / 2		
x	$y=f_1(x)$	Points
-2	-3	(-2 ; -3)
0	0	(0 ; 0)
2	3	(2 ; 3)
4	6	(4 ; 6)
6	9	(6 ; 9)

2x+y=7: $f_2(x)$=-2x+7		
x	$y=f_2(x)$	Points
-2	11	(-2 ; 11)
-1	9	(-1 ; 9)
0	7	(0 ; 7)
1	5	(1 ; 5)
2	3	(2 ; 3)
3	1	(3 ; 1)

Etape n°3 : tracé des courbes et lecture graphique (Tous les points du tableau ne sont pas présents).



Nous te laissons vérifier que le couple $(x;y)=(2;3)$ est bien solution du système $\begin{cases}-3x+2y=0\\ 2x+y=7\end{cases}$.

Exemple n°3 : Une infinité de solution. Soit le système $\begin{cases}2x-y=2 ...(1)\\ -x+\dfrac{y}{2}=-1...(2)\end{cases}$

Première fonction :

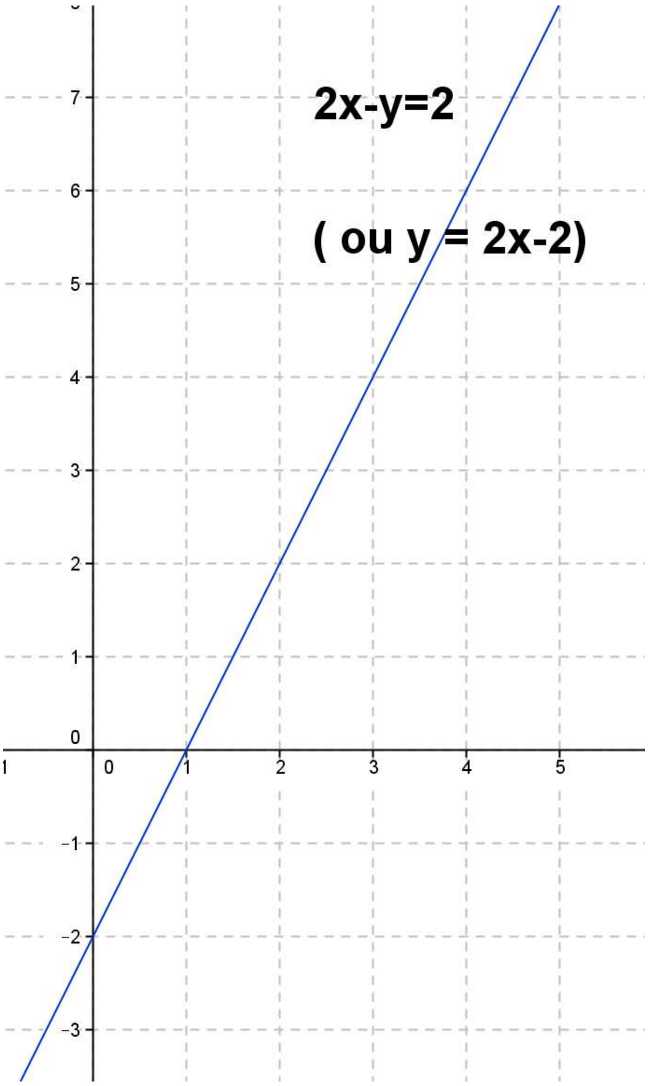
$$\begin{aligned}&2x-y=2\\&-y=2-2x\\&(-1)\times(-y)=(-1)\times(2-2x)\\&y=-2+2x\\&y=2x-2\end{aligned}$$

$f:x\rightarrow 2x-2$

Deuxième :

$$\begin{aligned}&-x+\frac{y}{2}=-1\\&\frac{y}{2}=-1+x\\&2\times\frac{y}{2}=2\times(-1+x)\\&y=-2+2x\\&y=2x-2\end{aligned}$$

$f:x\rightarrow 2x-2$



On obtient la même fonction dans les deux équations. Les courbes sont donc les mêmes, tout point de l'une est un point de l'autre, il y a en fait une infinité de solution pour ce « système » qui n'en est pas un.

Il s'agit en fait d'un problème d'équation du 1^er^ degré à deux inconnues dont les coordonnées $(x;y)$ de tout point de la droite ci-dessous forment un couple solution.

Tout point de la droite est tel que $y=2x-2$.

Donc : $2x-y=2x-(2x-2)=2x-2x+2=2$

Le couple $(x;y)=(x;2x-2)$ est bien solution de l'équation $2x-y=2$

Exemple n°4 : Soit le système $\begin{cases} -3x + y = 3 \ldots(1) \\ 6x - 2y = 6 \ldots(2) \end{cases}$

Etape n°1 : Recherche des fonctions par expression de y en fonction de x.

Recherche de f_1

$-3x + y = 3$ Soustraction de $-3x$

$-3x + y - (-3x) = 3 - (-3x)$

$-3x + y + 3x = 3 + 3x$

$y = 3x + 3$

$f_1 : x \to 3x + 3$

Recherche de f_2 :

$6x - 2y = 6$ Soustraction de $6x$

$6x - 2y - 6x = 6 - 6x$

$-2y = 6 - 6x$ Division par -2.

$\dfrac{-2y}{-2} = \dfrac{-6x + 6}{-2}$

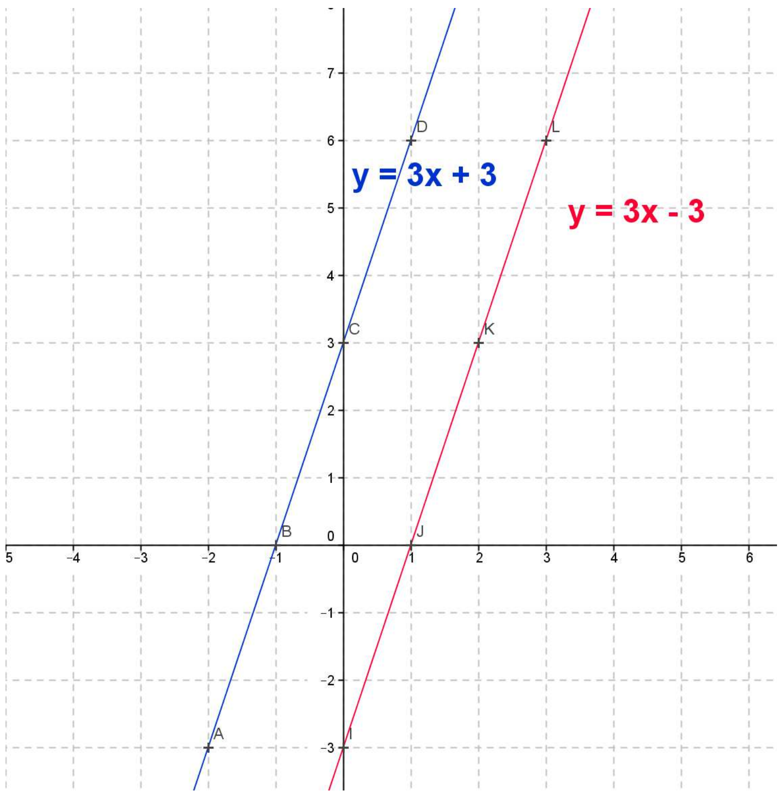
$y = 3x - 3$

$f_{2:} : x \to 3x - 3$

Etape n°2 : Recherche de points des droites et construction des courbes.

f_1(x)=3x+3. -3x+y=3		
x	y=f_1(x)	Points
-2	-3	(-2 ; -3)
-1	0	(-1 ; 0)
0	3	(0 ; 3)
1	6	(1 ; 6)
2	9	(2 ; 9)
3	12	(3 ; 12)

6x-2y=6 f_2(x)=3x-3		
x	y=f_2(x)	Points
-2	-9	(-2 ; -9)
-1	-6	(-1 ; -6)
0	-3	(0 ; -3)
1	0	(1 ; 0)
2	3	(2 ; 3)
3	6	(3 ; 6)



On obtient deux droites parallèles.

Comme il n'y a pas de point d'intersection, le système n'a pas de solution.

Les futurs cours sur les fonctions linéaires et affines reviendront sur cette notion.

Diverses présentations de système.

Nous avons présenté tous les systèmes sous la forme suivante : $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ où a, b, c, d, e et f sont des nombres quelconques.

Parfois, la présentation peut être différente. Mais ne soyez pas perdus, dans un tel cas :

1. Quelques manipulations simples permettront de revenir à cette forme traditionnelle.
2. Ou alors une observation pertinente du système permettra de le résoudre d'une manière plus rapide et logique.

Exemple n°1 : $\begin{cases} 2x+y=x-2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -3x+4y=7x-y+4\ldots(2) \end{cases}$

(1) : on soustrait à chaque membre le terme $+x$

(2) : on soustrait à chaque membre $7x-y$

$$\begin{cases} 2x+y=x-2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -3x+4y=7x-y+4\ldots(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-x=x-2-x \\ -3x+4y-(7x-y)=7x-y+4-(7x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ -3x+4y-7x+y=7x-y+4-7x+y \end{cases}$$

Soit au bout du compte : $\begin{cases} x+y=-2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -10x+5y=4\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$.

Le tri a été fait : il ne reste que des constantes dans les membres de droite il n'y a que des sommes dont les termes sont des multiples de x pour l'un et de y pour l'autre dans les membres de gauche.

L'objet de cette partie n'est pas de résoudre le système. A toi de le faire. Je te donne tout de même la solution : $(x;y)=\left(-\frac{14}{15};-\frac{16}{15}\right)$

Exemple n°2 :

$$\begin{cases} -3x+2y-9=2x-2y+4\ldots(1) \\ 4x-2y+2=-x+3y-1\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+2y-9-(-9)-(2x-2y)=2x-2y+4-(-9)-(2x-2y)\ldots(1) \\ 4x-2y+2-2-(-x+3y)=-x+3y-1-2-(-x+3y)\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+2y-9+9-2x+2y=2x-2y+4+9-2x+2y\ldots(1) \\ 4x-2y+2-2+x-3y=-x+3y-1-2+x-3y\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x+4y=13\ldots(1) \\ 5x-5y=-3\ldots\ldots(2) \end{cases} \qquad (x;y)=(-10{,}6;10)$$

Equation n°1 :

On soustrait -9 à chaque membre pour supprimer le terme -9 du membre de gauche.

On soustrait $2x-2y$ à chaque membre pour supprimer les termes $2x-2y$ du membre de droite.

Equation n°2:

On soustrait les termes 2 et $-x+3y$ à chaque membre pour faire disparaître le terme 2 du membre de gauche et les termes $-x+3y$ du membre de droite.

Exemple n°3 : Parfois, quelques développements peuvent s'imposer.

$$\begin{cases} -3(2x-y)=x+y-4..(1) \\ 10(-4x+y)=50..........(2) \end{cases}$$

Equation n°1 : on développe le membre de gauche.

Equation n°2 : là, il est pertinent de diviser chaque membre par 10.

$$\begin{cases} -3\times 2x+3\times y)=x+y-4..(1) \\ \dfrac{10\times(-4x+y)}{10}=\dfrac{50}{10}..........(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x+3y=x+y-4..(1) \\ -4x+y=5...............(2) \end{cases}$$

Equation n°1 : on soustrait de part et d'autre les termes $x+y$ et on réduit.

Certaines étapes intermédiaires doivent maintenant être du domaine de l'automatisme.

$$\begin{cases} -6x+3y-x-y=-4..(1) \\ -4x+y=5...............(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7x+2y=-4..(1) \\ -4x+y=5......(2) \end{cases}$$

$$(x;y)=(-14;-51)$$

Exemple n°4 : Il est bon de remarquer rapidement que certains systèmes différents par leurs coefficients ont les mêmes solutions que d'autres. Comment ? En connaissant ses tables de multiplication et en sachant faire des additions, des soustractions, des réductions.

Jeu : parmi ces 8 systèmes, 5 ont le même couple solution et 3 ont le même couple solution, mais différent du couple solution des 5 précédents.

Retrouve ces groupes de 5 et de 3 sans résoudre les systèmes.

Système1	$\begin{cases} -x+2y=-3 \\ 4x-y=1 \end{cases}$	Système 5	$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 4x+y=1 \end{cases}$
Système2	$\begin{cases} -x-2y=3 \\ 4x+y=1 \end{cases}$	Système 6	$\begin{cases} -2x+4y=-6 \\ 4\sqrt{5}x-\sqrt{5}y=\sqrt{5} \end{cases}$
Système 3	$\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-y=1 \end{cases}$	Système 7	$\begin{cases} 2y=-3-x \\ 4x+y=1 \end{cases}$
Système 4	$\begin{cases} -3x+6y=-9 \\ 2x-\dfrac{y}{2}=0{,}5 \end{cases}$	Système 8	$\begin{cases} -x+2y-1=-4 \\ 4x=1+y \end{cases}$

Solution : demander au professeur

Exemple n°5 : Il est parfois inutile de faire des manipulations pour se ramener à la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{11}{4}...(1) \\ \\ y=-2x+1...(2) \end{cases}$$

Comme le nombre y est le même dans les deux équations, on a obligatoirement :

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{11}{4}=-2x+1$ Multiplions par 4 les deux membres pour n'avoir que des entiers.

$2x-11=-8x+4$ Les étapes intermédiaires ne sont pas données. Des automatismes en 3ème.

$2x+8x=4+11$ Soustraction de -11 et de $-2x$ dans chaque membre pour se ramener à la forme $ax=b$. Etapes intermédiaires non données. Automatisme de 3ème.

$10x=15 \Rightarrow x=\dfrac{15}{10}=1{,}5$

Maintenant que x est connu, il suffit de résoudre une des deux équations en y. Prenons la n°2, sans fraction.

$y=-2x+1=-2\times 1{,}5+1=-3+1=-2$ La vérification est laissée aux soins du lecteur.

Remarque : c'est en utilisant cette méthode que l'on trouve les coordonnées du point d'intersection de deux courbes représentatives de 2 fonctions.

Soit $f:x\to -4x+5$ et $g:x\to \dfrac{x}{2}-4$.
Soit $M(x_M\,;y_M)$ le point d'intersection des deux courbes représentatives des fonctions.

Calculons les coordonnées de M.

Comme M est le point d'intersection des deux courbes : $f(x_M)=g(x_M)=y_M$.

On a donc $\begin{cases} y_M=-4x_M+5 \\ y_M=\dfrac{x_M}{2}-4 \end{cases}$

1) Recherche de x_M :

$$-4x+5=\frac{x}{2}-4$$
$$-8x+10=x-8$$
$$-8x-x=-8-10$$
$$-9x=-18$$
$$x=\frac{-18}{-9}=2$$

2) Recherche de y_M :

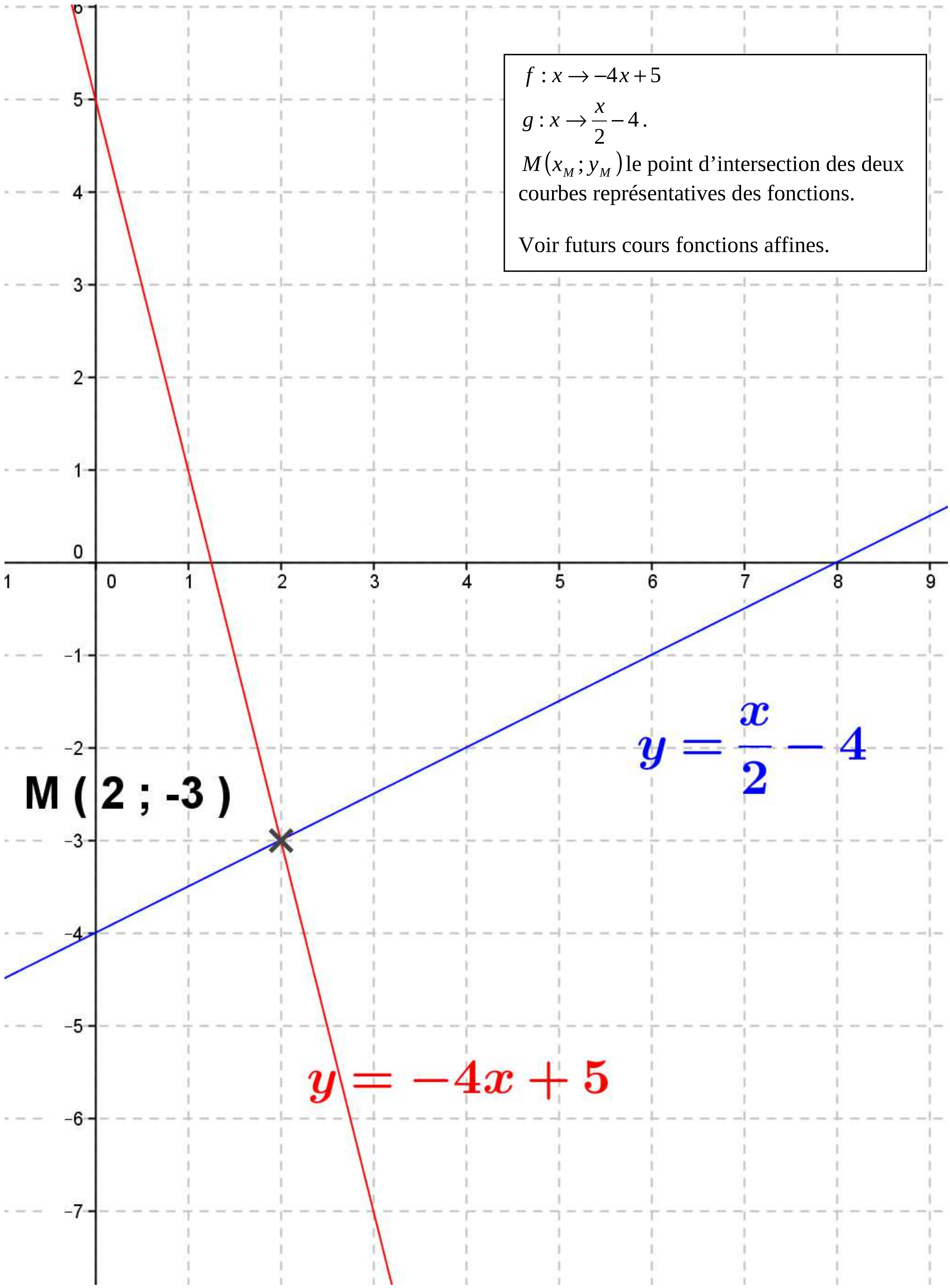
$$y=-4\times 2+5$$
$$y=-8+5$$
$$y=-3$$

$f : x \rightarrow -4x + 5$

$g : x \rightarrow \dfrac{x}{2} - 4$.

$M(x_M ; y_M)$ le point d'intersection des deux courbes représentatives des fonctions.

Voir futurs cours fonctions affines.



Mise en équation de problèmes. Exercices.

C'est bien joli tout cela mais encore faut-il s'en servir pour du concret.
Tel est l'objet de cette section qui a pour objet **de trouver le système** d'équations dont la solution sera la réponse au problème rencontré.

Nous aborderons dans cette section plusieurs situations de la vie courante (ou moins courante…) faisant intervenir plusieurs chapitres de troisième, voire des classes antérieures.

Certains exercices de cette section seront à faire à la maison ou en devoir en classe. Autant t'y mettre dès maintenant. Je suis à ta disposition.

Problème n°1 : une devinette pour les enfants.
Nous sommes deux nombres. Notre somme vaut 100 et notre différence 60. Qui sommes-nous ?

Notons par x et y ces deux nombres. Ils sont tels que : $\begin{cases} x+y=100...(1) \\ x-y=60...(2) \end{cases}$

Elimination des x : (1) – (2).

$$x+y-(x-y)=100-60$$
$$x+y-x+y=40$$
$$2y=40$$
$$y=\frac{40}{2}=20$$

Elimination des y : (1) + (2).

$$x+y+x-y=100+60$$
$$2x=160$$
$$x=\frac{160}{2}=80$$

Vérification : 80 +20 = 100 et 80 – 20 = 60. Les deux nombres recherchés sont 80 et 20.

Problème n°2 : l'âge du capitaine et celui de Mathusalem.

Il y a 10 ans, l'âge du capitaine était le cinquième de l'âge de Mathusalem.
Dans 15 ans, l'âge du capitaine sera le tiers de l'âge de Mathusalem.

Quel âge ont-ils aujourd'hui ?

Problème n°3: Opération marketing.

Lors de l'avant-première d'un film, la production a offert à chaque spectateur enfant un ballon et à chaque spectateur adulte un tee-shirt.

Un ballon coûtait 0,15 € et un T-shirt 1,20 €.

Lors de l'avant première, la place enfant était de 6 € et la place adulte 11 €.
2 650 spectateurs ont assisté au spectacle et la recette totale de la soirée a été de 25 475 €.

Combien les objets publicitaires ont-ils coûté à la production ?

Problème n°4 : Retour aux racines.

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{3} \\ 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=2\sqrt{3} \end{cases}$

Problème n°5 : Problème de ménage. Madame et monsieur travaillent tous les deux.

En 2 011, ils ont gagné à eux deux 42 000 €.

En 2 012, la situation financière du ménage a changé.
Monsieur, pour conserver son emploi, a dû accepter une baisse de salaire de 5%.
En revanche, Madame est passée cadre et son salaire a augmenté de 65%.

Finalement, le revenu du ménage a augmenté de 24%.

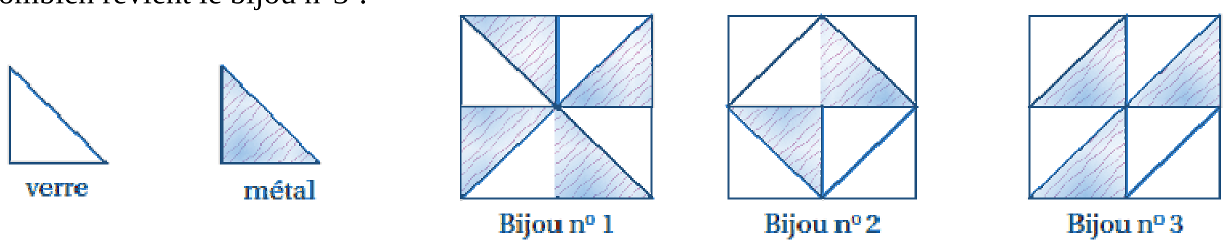
Combien gagnait-il chacun en 2 011 ?
Combien gagnait-il chacun en 2 012 ?

Problème n°6 :D.N.B 2011 :

On fabrique des bijoux à l’'aide de triangles qui ont tous la même forme. Certains triangles sont en verre et les autres sont en métal.
Trois exemples de bijoux sont donnés ci-dessous.
Les triangles en métal sont représentés en bleu, ceux en verre sont représentés en blanc.

Tous les triangles en métal ont le même prix. Tous les triangles en verre ont le même prix.
Le bijou n°1 revient à 11 € ; le bijou n°2 revient à 9,10 €.

A combien revient le bijou n°3 ?



Problème n°7 : Nos amis les Anglais.
Comme tu le sais, ils ne font pas tout comme toi. Ils conduisent à gauche, ils n’ont pas l’euro comme monnaie, ils n’ont pas la même langue. Ils ont une reine. Ils ne mangent ni lapin ni escargot mais de la panse de brebis. Leurs fromages sont ce qu’ils sont, comme leur cuisine d’ailleurs. Entre la France et l’Angleterre, c’est souvent du je t’aime moi non plus et les tabloïdes de sa gracieuse Majesté se plaisent à jeter de l’huile sur le feu dès que l’occasion se présente.

A propos de feu...de même qu’ils mesurent les longueurs en pied et en pouce et autres unités bizarroïdes, ils trouvent le moyen de ne pas mesurer les températures en degré Celsius comme tu le fais toi, mais en degré Fahrenheit.

Par exemple : - 20°C= -4°F et 15°C=59°F

Notons par T_C *la température en °C et par* T_F *la même température mais exprimée en °F.*

Ces deux températures sont reliées par une fonction mathématique de la forme : $T_F = a\times T_C + b$ *où a et b sont deux constantes (des nombres à valeur fixe).*

1. *Trouve a et b pour donner ensuite l'expression de la fonction qui donne T_F en fonction de T_C.*

2. *Toi, tu as appris que l'eau bout à 100°C. Qu'apprend un anglais à l'école à propos de la température d'ébullition de l'eau ?*

3. *Sean, ton correspondant du Sussex, te fait savoir qu'il a 104°de température. Rien d'anormal à ce qu'il ne soit pas mort, et rassure-toi, les thermomètres anglais n'ont pas des dimensions démesurées. Quelle est la température du petit Sean en °C ?*

4. *Sean est en vacances d'hiver dans le Doubs. Il a embarqué avec lui un thermomètre anglais. Un beau matin, le thermomètre gradué en °F et celui gradué en °C indiquent tous deux la même mesure. Quelle est cette température ?*

Problème n°8 : En passant par les identités remarquables.

Voici un joli système du second degré. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2461 \\ x - y = 23 \end{cases}$. Cependant, tu as moyen de trouver la solution…

Problème n°9 : Allons voir chez les grecs.

Un agriculteur grec possède 540 m de grillage. Il s'en sert pour clôturer un champ ayant la forme d'un triangle rectangle dont un côté formant l'angle droit mesure 216m. Quelles sont les dimensions de ce champ ?

Problème n°10 : Le trésorier compte ses sous.

Dans la caisse :
Le nombre de billet de 5 € plus le nombre de billet de 20 € est de 26.
Le nombre de billet de 20 € plus celui de 50 € est de 14.
Le nombre de billet de 5 € plus le nombre de billet de 50 € est de 20.

Quelle somme d'argent est en caisse ?

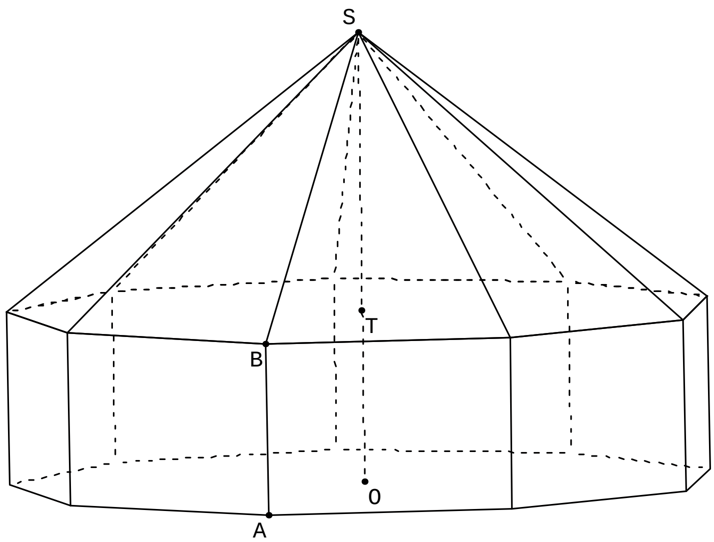
Problème n°11 : C'est le cirque !

Un cirque est constitué d'un prisme régulier à neuf côtés surmonté d'une pyramide régulière elle aussi à 9 côtés.

Le volume total du cirque est de 1 179,5 m^3. L'ennéagone (polygone à 9 côtés) fait 6 m de côté.

La hauteur sous la flèche, SO, vaut 9,7m.

Calculer la hauteur du prisme et la hauteur de la pyramide.



Problème n°12 :
Pourquoi ne pas programmer une feuille de calcul Excel pour résoudre les systèmes de 2 équations du premier degré à 2 inconnues ?