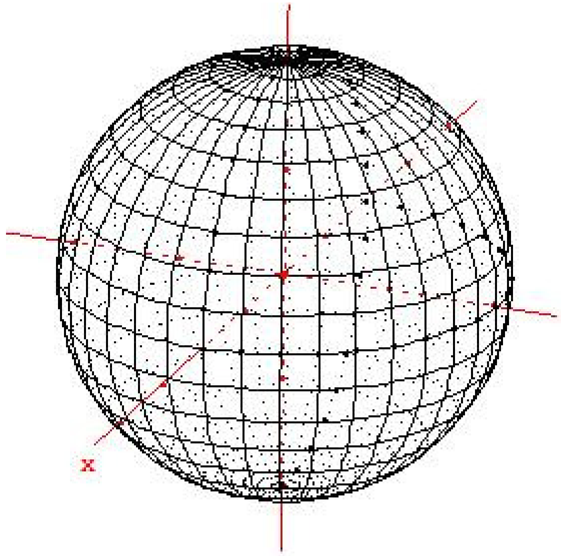
Les sphères et les boules.

Sphères et boules : définitions.

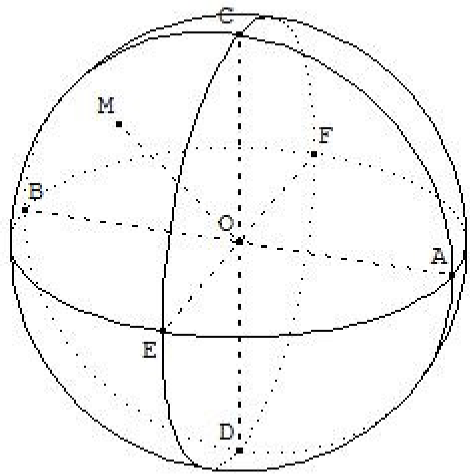
1. La sphère :



Une sphère est une figure géométrique caractérisée par deux éléments essentiels :

Son CENTRE et son RAYON.

Une sphère de centre le point O et de rayon R est formée de l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que la distance OM égale le rayon de la sphère.



La figure ci-contre est une représentation en perspective cavalière d'une sphère de centre O et de rayon
$R = OM = OA = OB = OC = etc...$

Nous utiliserons la notation : $S(O;R)$ pour parler d'une sphère de centre O et de rayon R.

Ainsi :

Si OM = R, alors le point M appartient à la sphère de centre O et de rayon R

En notations mathématiques, cela se traduit par :

$$OM = R \Rightarrow M \in S(O;R).$$

Réciproquement :

Si un point M appartient à une sphère de centre O et de rayon R, alors OM = R.

$$M \in S(O;R) \Rightarrow OM = R.$$

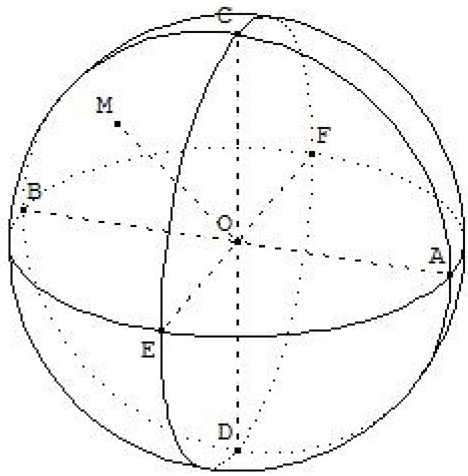
Vocabulaire : Deux points A et B tels que [AB] est un diamètre de la sphère sont dits « diamétralement opposés ». En conséquence, le centre de la sphère est le milieu du segment [AB].

2. La boule :

Une boule de centre O et de rayon R est formée de tous les points M de l'espace tels que la distance OM est **inférieure ou égale** au rayon de la boule.

On considère donc les points de la sphère plus ceux « dans la sphère ».

Ainsi, si nous utilisons la notation $B(O;R)$ pour la boule de centre O et de rayon R :



Si M est un point de la boule de centre O et de rayon R, alors OM est inférieure ou égale à R.

$$M \in B(O;R) \Rightarrow OM \le R.$$

Réciproquement : Si OM est inférieure ou égale à R, alors M est un point de la boule de centre O et de rayon R.

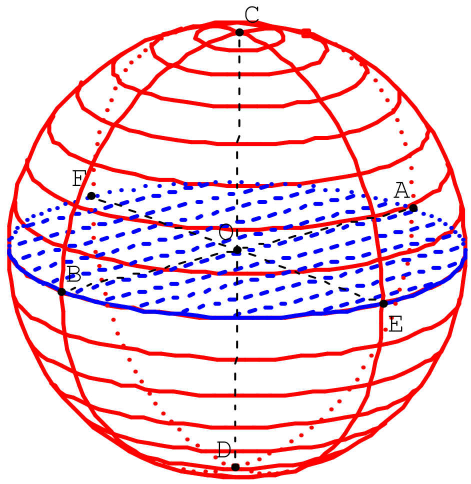
$$OM \le R \Rightarrow M \in B(O;R).$$

Formules.

1. Aire d'une sphère:

a) L'aire d'une sphère de rayon r :

$$A = 4\pi r^2.$$



Comme le rayon vaut la moitié du diamètre, si on note par d le diamètre :

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 4\pi \times \frac{d^2}{2^2} = 4\pi \times \frac{d^2}{4} = \frac{4\pi d^2}{4} = \pi d^2.$$

On remarquera que l'aire d'une sphère est égale à 4 fois celle d'un disque de même rayon.

b) Exemples :

- **Aire d'une sphère de 8 cm de rayon au centimètre cube près. :**

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \times 8^2 = 4 \times 64\pi = 256\pi.cm^3 \approx 804.cm^3$$

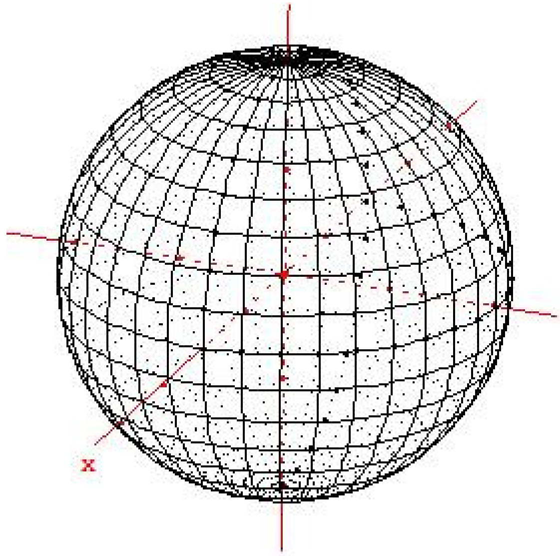
- **Aire de la Terre au kilomètre carré près et au million de km² près en écriture scientifique :**
  En prenant comme valeur pour le rayon de la Terre 6 370 km.

$$A = 4\pi r^2 \approx 4\pi \times 6370^2 \approx 509.904.363.km^3 \approx 510.000.000.km^2$$

$$A \approx 5{,}1 \times 10^9 km^2.$$

2. Volume d'une boule :

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

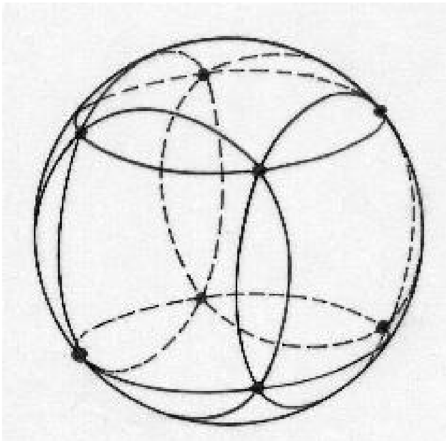


Si on remplace R par le demi-diamètre :

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \times \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{d^3}{2^3} = \frac{4\pi d^3}{3\times 8} = \frac{4\times\pi\times d^3}{3\times 2\times 4} = \frac{\pi\times d^3}{3\times 2} = \frac{\pi d^3}{6}.$$

Exemple *: Volume d'une boule de pétanque de 72 mm de diamètre.*

Valeur exacte en millimètres cubes puis valeur approchée au cm^3 près puis au 1/10 ^{ème} de litre près.



$$r = \frac{72}{2} = 36.mm$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi\times 36^3}{3} = \frac{4\pi\times 46656}{3} = 62208\pi.mm^3$$

$$V \approx 195432.mm^3$$

Comme on a : 1 cm^3 = 1 000 mm^3 et 1 litre = 1 000 cm^3

$$V \approx 195432.mm^3$$

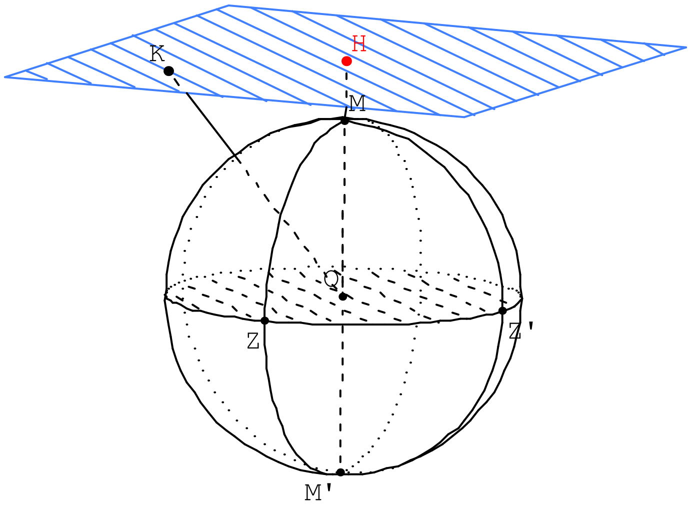
$$V \approx 195{,}432.cm^3 = 0{,}195432.litre$$

$$V \approx 195.cm^3$$

$$V \approx 0{,}2.litre.$$

Sections de sphère par un plan.

1. **Distance d'un plan à une sphère.**



Le parallèlogramme bleu de la figure ci-contre représente le plan qui découpera la sphère : le plan de coupe.

Préalable : la distance entre un point quelconque du plan et le centre de la sphère varie en fonction de la position de ce point du plan.

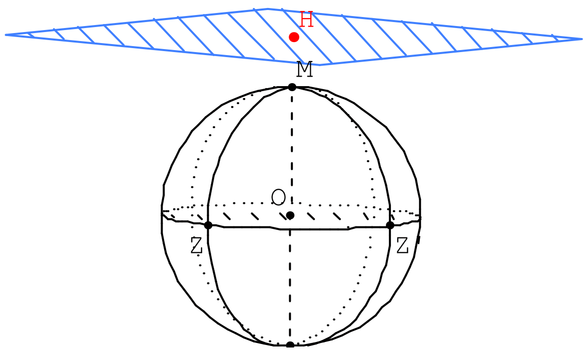
Sur la figure, on a : $OK > OH$.

Il existe un point du plan pour qui cette distance est la plus petite. Sur la figure, il s'agit du point H.

Ce point H est tel que le triangle KHO est toujours un triangle rectangle en H :

On appelle distance du plan à la sphère la distance OH.

2. **Position relative d'un plan par rapport à une sphère de rayon r .**

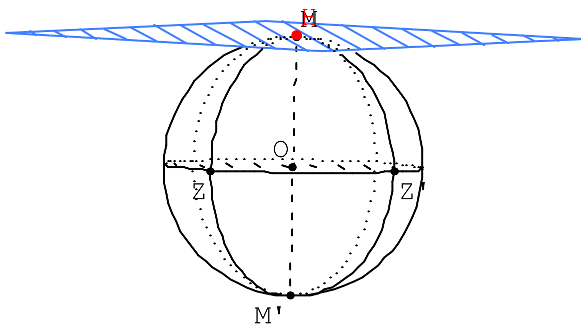


a) *Premiere situation:* $OH > r$.

Le plan ne coupe pas la sphère.

b) *Deuxième situation* : $OH = r$

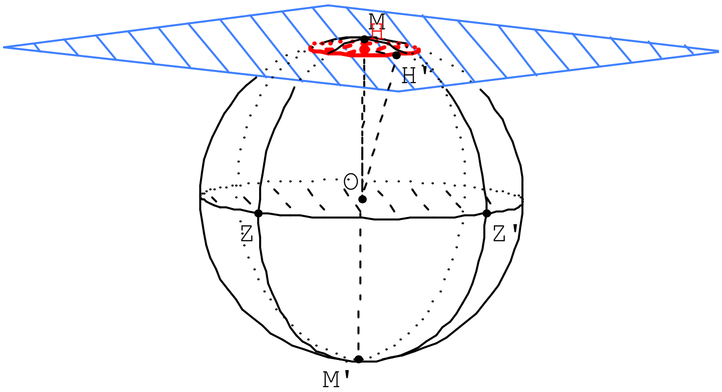
La section de la sphère se limite au point H, seul point qui appartient à la fois au plan et à la sphère.

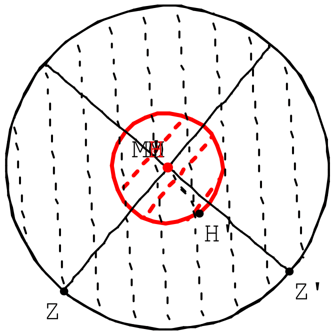


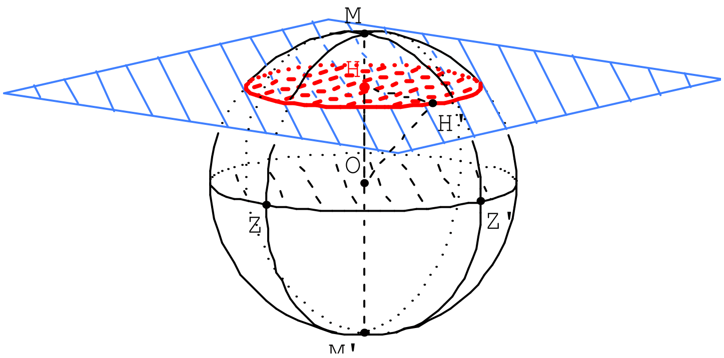
On dit que **LE PLAN EST TANGENT A LA SPHERE en H.**

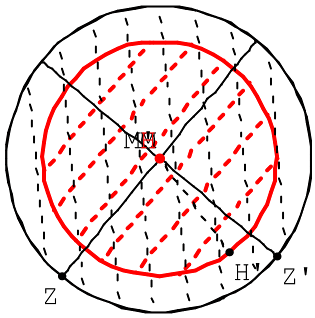
Le plan et le rayon [OH] sont perpendiculaires.

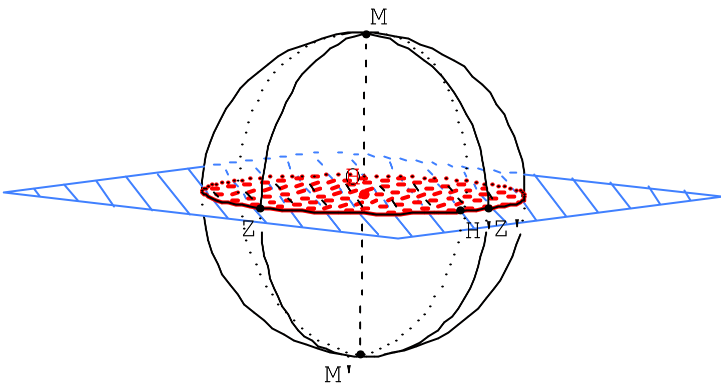
c) **Troisième situation :** $OH < r$

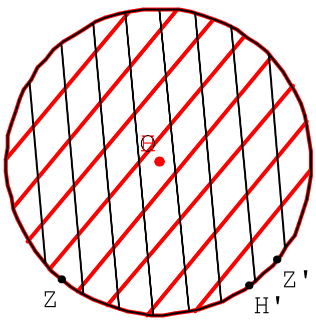


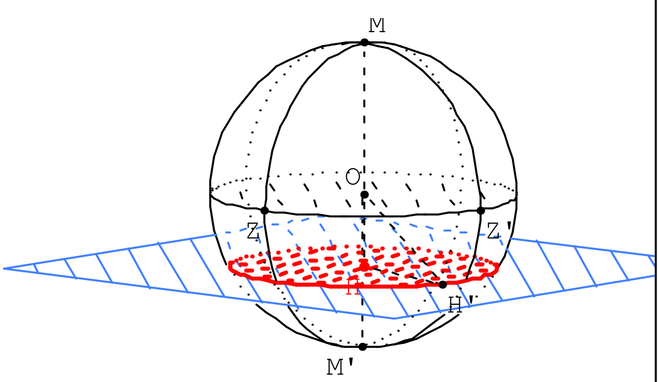












La section est un cercle de centre le point H.

Plus celui-ci se rapproche du centre de la sphère, plus le rayon de la section augmente.

On obtient une section de la plus grande taille quand la section passe par le centre de la sphère :

Une telle section s'appelle un grand cercle de la sphère.

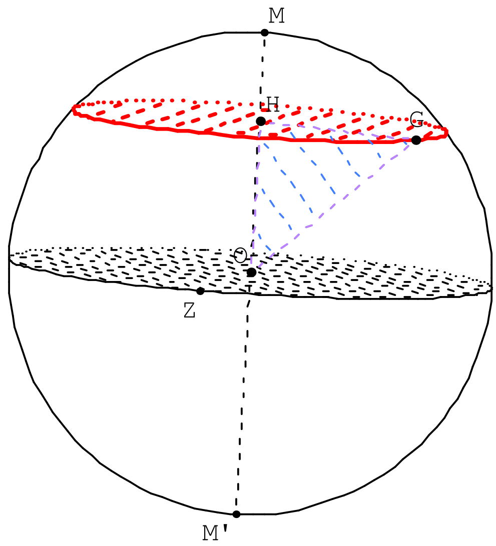
En continuant à baisser le point H le long du diamètre [MM'], la section diminue pour atteindre la position limite en M'où le plan de coupe est de nouveau tangent à la sphère.

3. **Calcul du rayon de la section :**

La section est le cercle de centre H. G est unpoint de cette section.

Soit H le centre de la section et G un point de cette section.

HG est donc le rayon de la section, rayon que nous allons maintenant calculer.



Comme le triangle HGO est rectangle en H, d'après l'égalité de Pythagore :

$$OG^2 = OH^2 + HG^2$$

Or : le point G appartient aussi à la sphère de centre O.

Si on note par R le rayon de la sphère et par r celui de la section, on a :

$$R^2 = OH^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - OH^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - OH^2}$$

4. **Exemples d'exercices:**

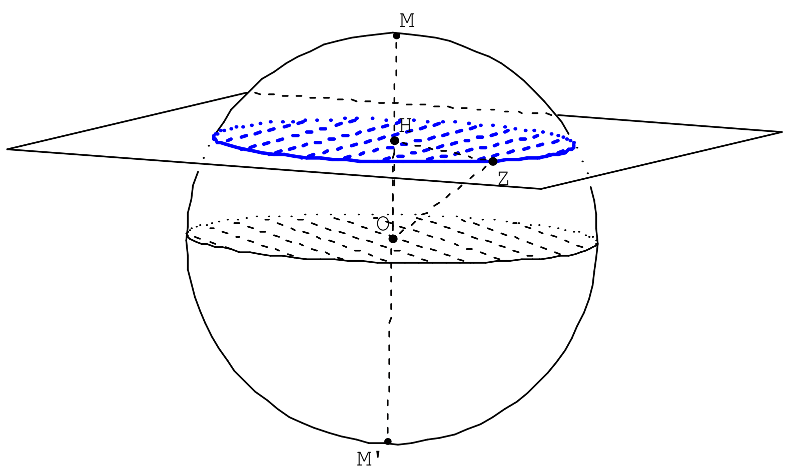
a) On considère une sphère de rayon $r = 5.cm$ et de centre O.
Soit [OM] un de ses rayons et H, un point de ce rayon tel que : OH = 3,5 cm.

Par H passe un plan perpendiculaire à [OM].

Question : dessinez aux vraies dimensions le cercle issu de la section de la sphère par le plan.

Méthode : Il suffit de dessiner aux vraies dimensions le triangle HOZ rectangle en H sachant que OH = 3 cm et OZ = 5 cm.

Avec, le compas, on reporte la longueur HZ et on trace un cercle ayant ce rayon.



b) Calculer au 1/10ème de mm près le rayon et le périmètre de la section de l'exercice a).

- Rayon : dans OHZ rectangle en H, d'après l'égalité de Pythagore :

$$OZ^2 = OH^2 + HZ^2$$
$$5^2 = 3,5^2 + HZ^2$$
$$25 = 12,25 + HZ^2$$
$$HZ^2 = 25 - 12,25 = 12,75 = \frac{51}{4} \Rightarrow HZ = \sqrt{\frac{51}{4}}cm = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{4}}cm = \frac{\sqrt{51}}{2}cm \approx 3,57.cm$$

(Remarque : comme 1 mm = 1/10 ème de cm, le 1/10 ème de mm est le 1/100 ème du cm d'où l'arrondi qui porte sur le 7, chiffre des centièmes de la longueur exprimée en cm.)

- Soit P le périmètre de la section :

$$P = 2\pi r = 2\pi \times \frac{\sqrt{51}}{2} = \sqrt{51} \times \pi.cm \approx 22,44cm.$$

c) Une orange considérée comme parfaitement sphérique a un rayon de 9 cm.
Sa peau a une épaisseur constante de 5 mm.

On supposera que le jus obtenu une fois l'orange pressée représente 60 % du volume de l'orange une fois épeluchée.

- Calculer au mm³ près le volume de jus obtenu.

- Quel % du volume total de l'orange (non épeluchée) représente le volume du jus obtenu ?

- Volume du jus au mm³ près : V_j.

* Rayon de l'orang épeluchée : $r_e = \frac{90}{2} - 5 = 45 - 5 = 40.mm$

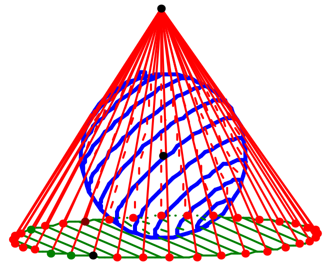
$$* \; V_j = \frac{60}{100} \times \frac{4\pi r_e^3}{3} = \frac{60 \times 4 \times \pi \times 40^3}{100 \times 3} = 51200\pi.mm^3 \approx 160850.cm^3.$$

* % de jus par rapport au volume total :

$$P = \frac{V_{jus}}{V_{total}} \times 100 = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{4\pi \times 40^3}{3}}{\frac{4\pi \times 45^3}{3}} \times 100 = \frac{60}{100} \times \frac{4\pi \times 40^3}{3} \times \frac{3}{4\pi \times 45^3} \times 100$$

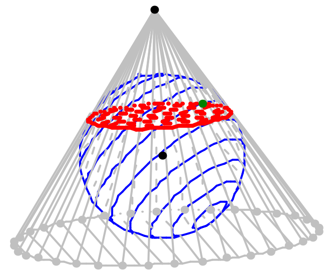
$$P = \frac{60 \times 4\pi \times 40^3 \times 3 \times 100}{100 \times 4\pi \times 45^5 \times 3} = \frac{60 \times 40^3}{45^3} = 60 \times \left(\frac{40}{45}\right)^3 = 60 \times \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 42\%$$

Exercices sphères et sections de sphères.



***ExerciceN°1** :*
Une boule est tangente intérieurement aux parois et à la base d'un cône.

La génératrice du cône mesure 20 cm et le diamètre de la base mesure lui-aussi 20 cm.



a. *Calculer le rayon de la boule au mm près.*

b. *Les points de contact entre la boule et le cône forment un cercle correspondant à une section de la sphère.*

   Calculer le rayon de ce cercle.

c. *Ce cercle section délimite un disque qui sert de base à un petit cône qui a pour sommet le même que le grand cône de départ.*

   Que vaut H *, la hauteur du grand cône, au mm près ?*
   Que vaut h *, la hauteur du petit cône, au mm près ?*

d. *On note respectivement par* $V;v;V_b$ *les volumes du grand cône, du petit cône et de la boule.*

   Calculer ces differents volumes au 1/10ème de cm^3 *près.*

e. *Partie obligatoire pour Lucas, Nomémie, Laureen,Loïc, Corentin.*
   Facultative pour tous les autres

   1 *En conservant les valeurs exactes du rayon de la boule et des hauteurs des deux cônes, démontrer que :*

$$V = \frac{1000\pi \times \sqrt{3}}{3}.cm^3 \qquad v = \frac{125\pi \times \sqrt{3}}{3} cm^3 \qquad V_b = \frac{4000\pi \times \sqrt{3}}{27} cm^3.$$

   2 *Calculer les proportions suivantes :* $\frac{V_b}{V}.et\,\frac{v}{V}$

***Exercice N°2** : Dédé et Juju sont deux commis de cuisine. Chacun d'eux doit éplucher un lot de pommes de terre que nous considérerons comme parfaitement sphériques.*

Dédé doit éplucher 81 pommes de terre de 2 cm de rayon chacune.
Juju doit éplucher trois grosses pommes de terre de 6 cm de rayon chacune.

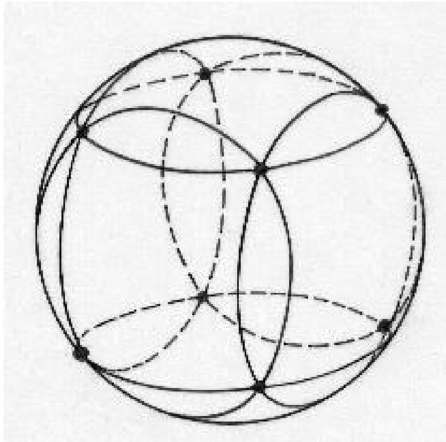
a. *On supposera qu'un centimètre cube de pomme de terre a une masse de 0,8g. Calculer la masse des lots de chaque commis de cuisine.*

b. *On suppose qu'il leur faut 0,4seconde pour éplucher un centimètre carré de surface de pomme de terre. Calculer le temps neccéssaire à chacun pour éplucher son lot.*

c. *On suppose que les épeluchures ont 1 mm d'épaisseur. Calculer le % de perte que représentent les épeluchures pour chaque lot, en supposant que les épeluchures pèsent elles-aussi 0,8 g/cm*^{3}*.*

d. *Quelles conclusions peut-on tirer des résultats précédents ?*

Exercice N°3 *: Les 8 points d'intersection des motifs décoratifs de la boule de pétanque sont les sommets d'un cube.*

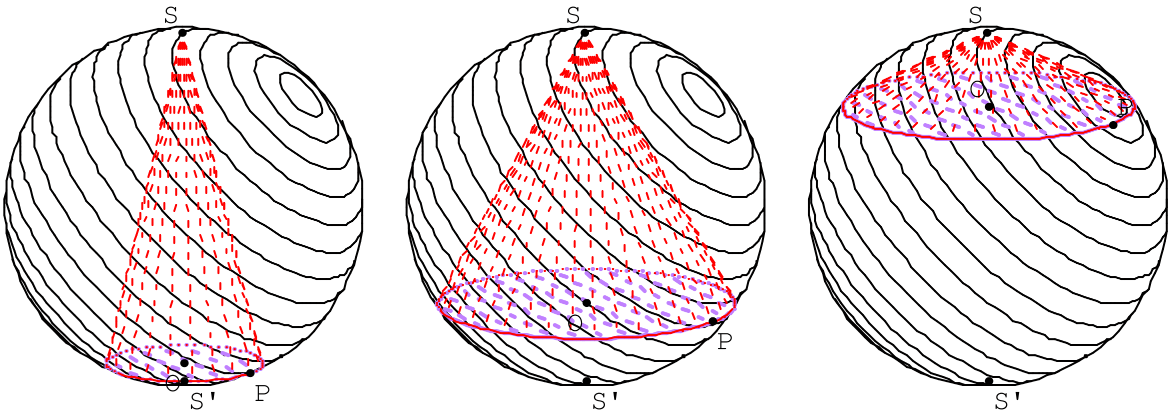


Sachant que ces cercles sont tous identiques :

a. *Calculer le rayon de ces cercles.*

b. *Calculer le coté du cube.*

Exercice N°4 : A faire par équipe de trois.



[S'S] est un diamètre d'une boule. On donne SS' = 20 cm.

On coupe la boule par un plan perpendiculaire à [SS']. Le plan coupe [SS'] en un point O.

On construit ensuite le cône de hauteur [OS] et de base le disque issu de la section du plan avec la boule.

On notera h la hauteur du cône : $h = OS$.

On note par $V(h)$ la fonction de variable h qui permet de calculer le volume du cône connaissant h.

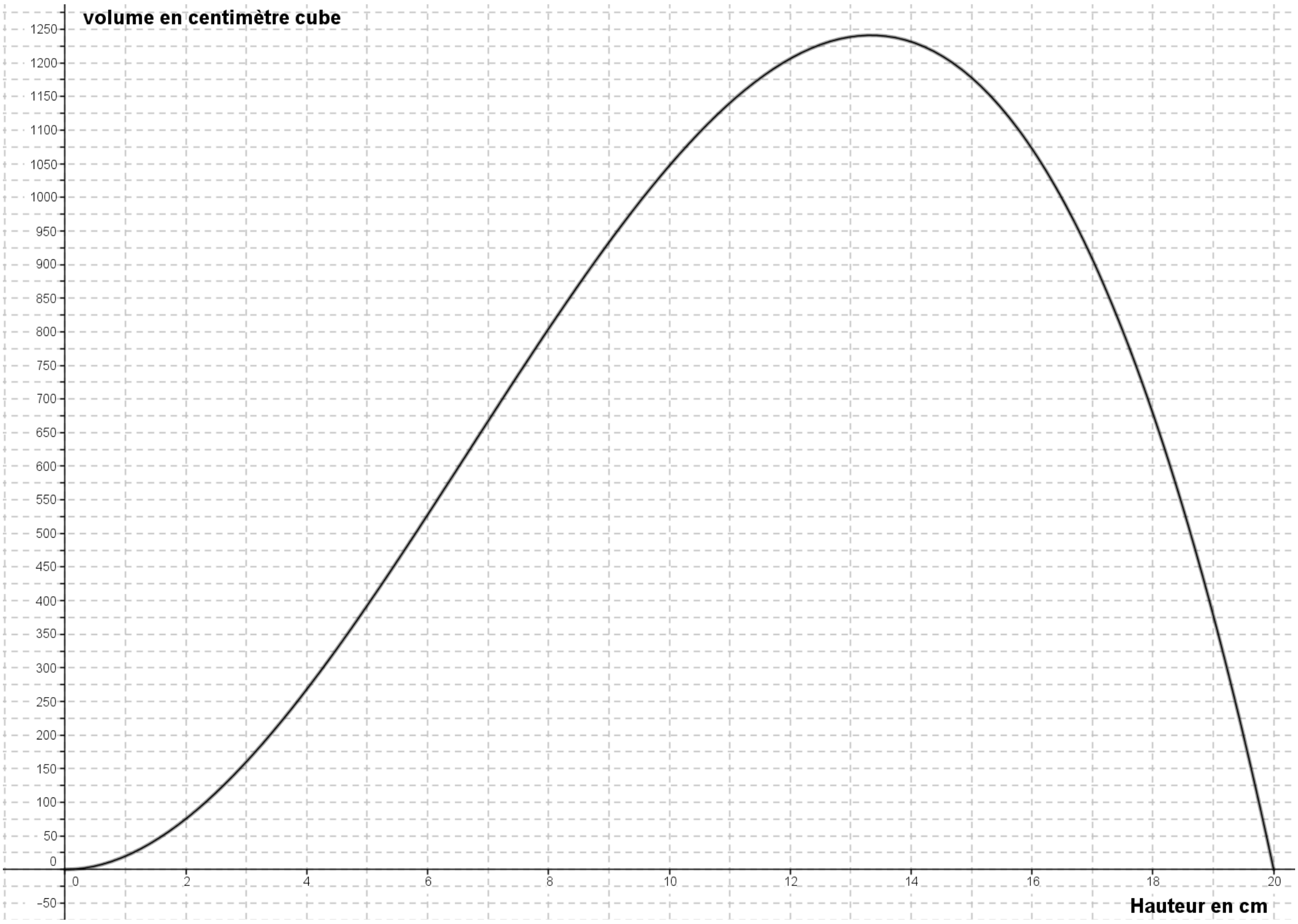
a. Entre quelles valeurs varie h ?

b. Que valent $V(0)$ et $V(20)$?

c. Calcule $V(8)$ et $V(15)$ au cm^3 près.

d. Graphiquement : retrouve les réponses aux questions b et c.

e. La fonction V est la suivante : $V : h \rightarrow \dfrac{\pi(20-h)h^2}{3}$ dont la courbe ci-dessous est une représentation graphique.



- Pour quelles hauteurs le volume est-il de 400 cm^3 ?
- Que vaut le volume pour h = 7,5 cm ?
- Quel est le volume maximum ?
- Quelle est alors la hauteur ?

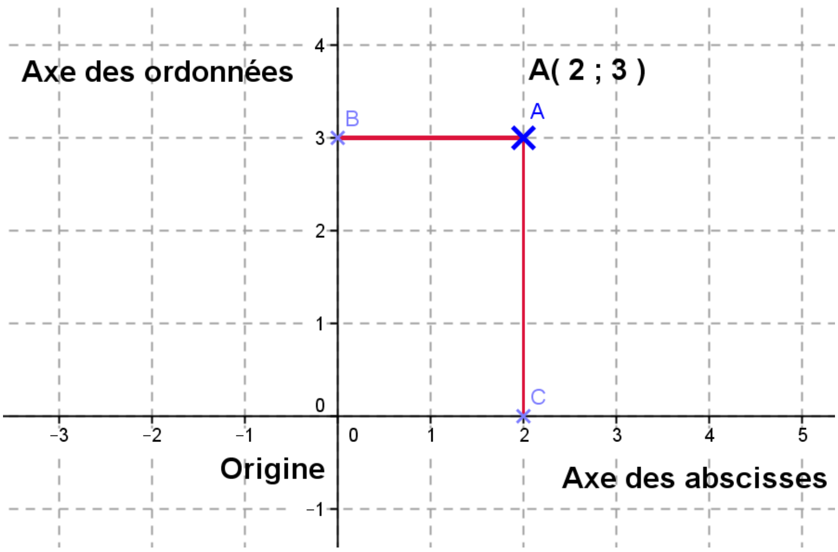
f. A l'aide d'un tableur : Programme une feuille de calcul permettant :

- d'obtenir la courbe.
- de trouver la hauteur, au mm près, pour laquelle le volume est le plus grand.
- de trouver, au cm^3 près, quel est le volume le plus grand.

1. Introduction : Pour se situer **dans le plan**, il faut un repère.

Un repère est formé d'une **origine** et **deux axes orientés** munis chacun d'une **graduation**. Une fois cette étape effectuée, un point du plan est repéré par la connaissance de 2 nombres, chacun ayant son prore rôle.

L'abscisse du point permet de le situer par rapport à l'axe des abscisses.
Son ordonnée par rapport à l'axe des ordonnées.



Le plan est donc muni de 2 réseaux de droites :

- des droites parallèles à l'axe des abscisses :
  Un point du plan est obligatoirement sur une d'entre elles.

- des droites parallèles à l'axe des ordonnées :
  Un point du plan est obligatoirement sur une d'entre elles.

2. Un repère pour la sphère terrestre :

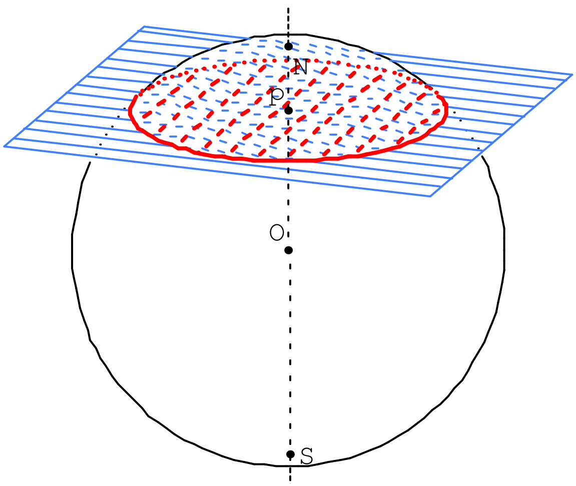
Un tel système ne peut exister que sur une surface plane, or la Terre est une sphère. Pour se repérer sur Terre , l'homme a mis au point un repère adapté à une sphère.

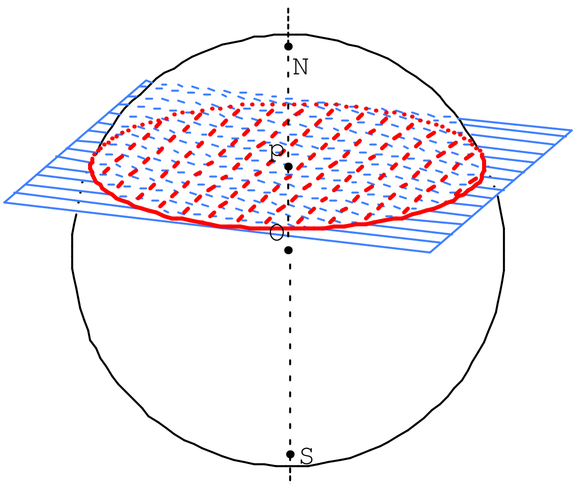
a) Les parallèles :

Nous savons qu'une section de sphère par un plan perpendiculaire à un de ses diamètres est un cercle et qu'un tel cercle est dit « un grand cercle de la sphère » si ce plan passe par le centre de la sphère.

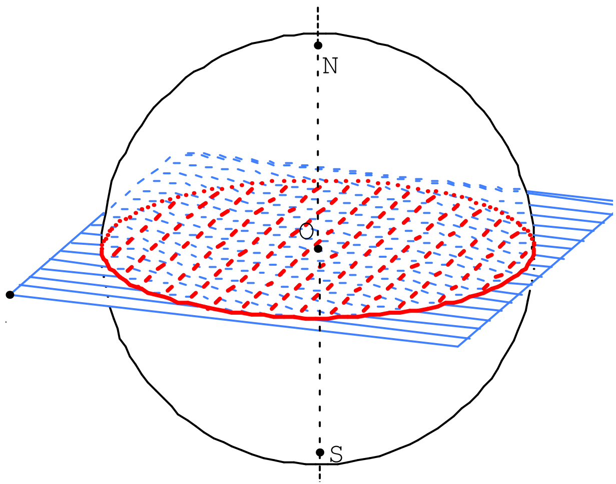
Appliquons ces connaissance à la Terre relativement au diamètre reliant les pôles.

N : pôle nord.   S : pôle sud.   P : centre du cercle section.

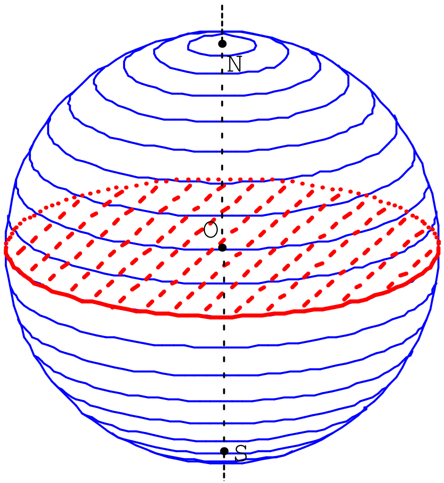




Quand cette section passe par le centre de la Terre : nous avons un grand cercle particulier de la Terre: l'équateur.



On peut tracer une infinité de tels cercles imaginaires à la surface de la Terre.



Ces cercles sont des parallèles.

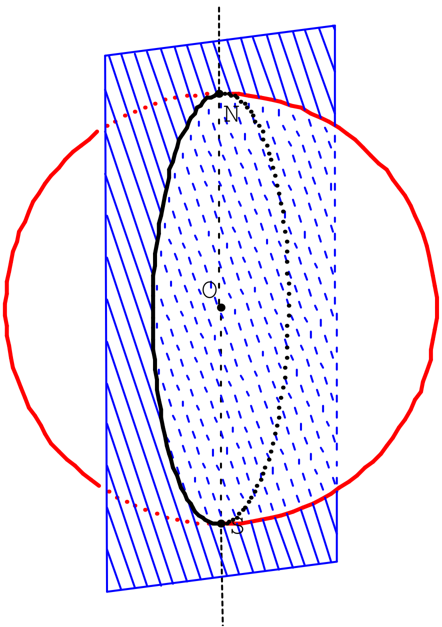
Tout point à la surface de la Terre se trouve sur un parallèle précis.

On parle du parallèle du point en question, c'est son parallèle.

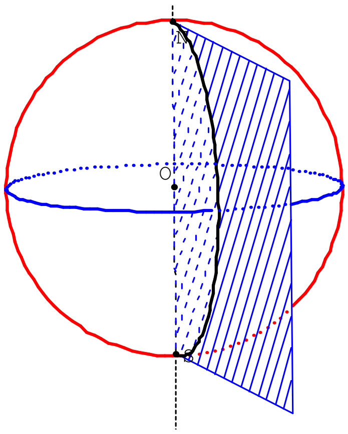
b) Les méridiens :

Coupons maintenant la Terre par un plan méridien, c'est-à-dire qui passe par l'axe de rotation de la Terre. Un tel plan contient obligatoirement le centre de la Terre.

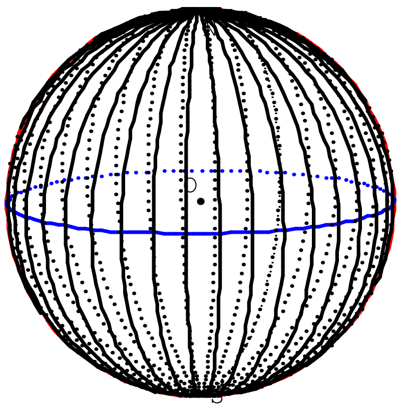
La section obtenue sera donc un grand cercle de la Terre qui passera par les pôles.



Maintenant, coupons par des demi-plans ayant pour « frontière » l'axe nord-sud.Les sections ne sont plus des grands cercles mais des demi-grands cercle dont les extrémités sont les pôles. L'équateur est représenté en bleu sur la figure ci-dessous.

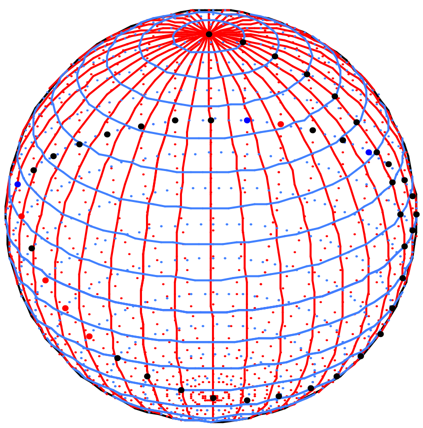


Ces demi-grands cercles sont des méridiens.



Tout point à la surface de la Terre se trouve sur un méridien précis.

On parle du méridien du point en question, c'est son méridien.



Finalement : la surface terrestre est parcourue par un ensemble de lignes imaginaires que sont les parallèles et les méridiens.

Chaque lieu terrestre se trouve sur un parallèle et sur un méridien précis.

Notre repère terrestre est pratiquement fini :
Pour savoir de quel point on parle, il suffit de connaître son parallèle et son méridien.

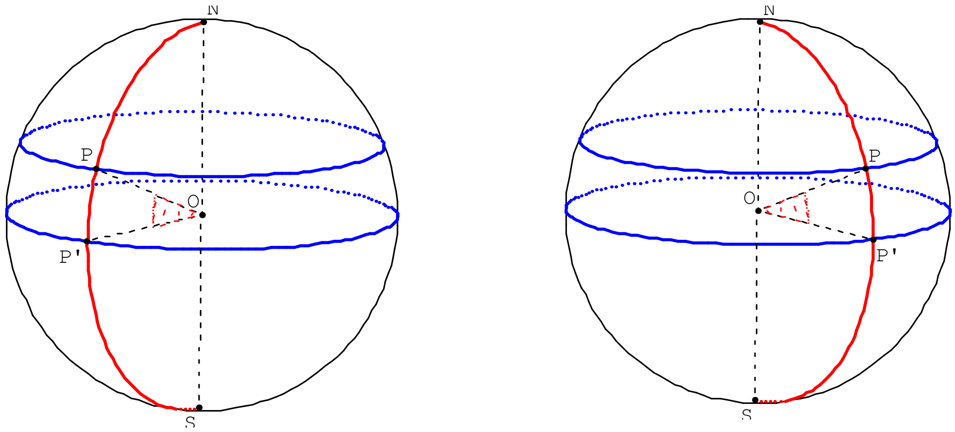
On repère son parallèle par rapport à un parallèle d'origine : L'EQUATEUR.

On repère son méridien par rapport à un méridien d'origine : Le MERIDIEN DE GREENWICH.

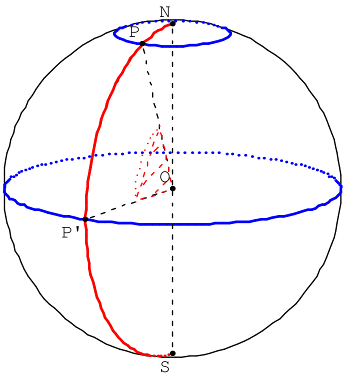
Comment les repère-t-on ? En donnant des ANGLES.

3. Latitude et longitude d'un point à la surface de la Terre.

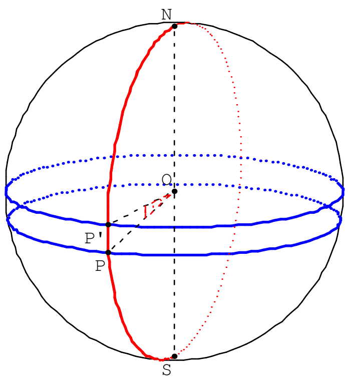
a) **Latitude :**
Partons du point P vers l'équateur en suivant son méridien. On arrive en P'.
Si nous déplaçons le point P tout en restant sur le même parallèle, l'angle $\widehat{POP'}$ ne change pas.



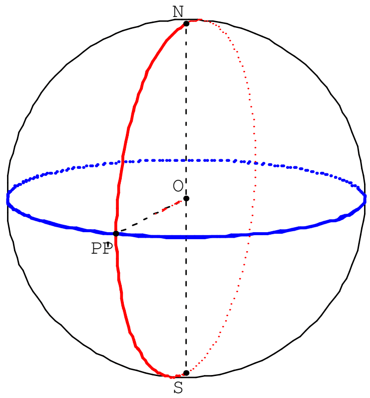
Pout tout point d'un parallèle donné, cet angle est identique : cet angle est la latitude du point. La latitude du point permet de savoir sur quel parallèle il se situe. Elle est précisée Nors ou Sud.



Parallèle de 70° N de latitude.



Parallèle de 10° Sud de latitude



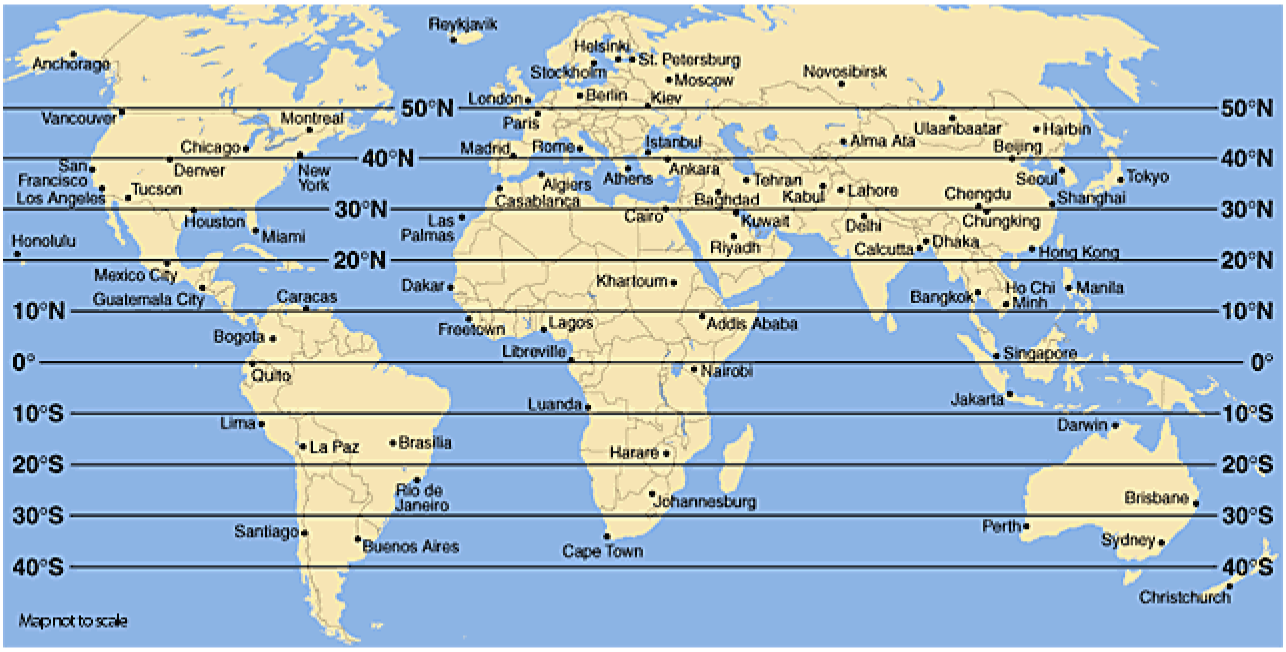
0° est la latitude de l'équateur.

La latitude repère un parallèle.
Tous les points d'un même parallèle ont la même latitude.
La latitude varie de 0° à 90°N et de 0° à 90°S.

Certains parallèles particuliers :

Les tropiques : environ 23°
Les cercles polaires : environ 67°

Sur une carte, des parallèles et leur latitude sont souvent reportés.



b) La longitude.

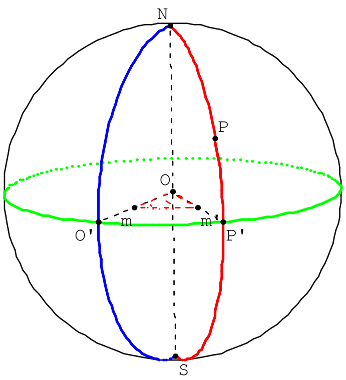
En bleu figure le méridien d'origine de Greenwich. Prenons un point P sur son méridien (en rouge) et rendons-nous à l'équateur en suivant le méridien. Nous arrivons en P'.

O' est un point très particulier : il est à l'intersection de l'équateur et du méridien de Greenwich.

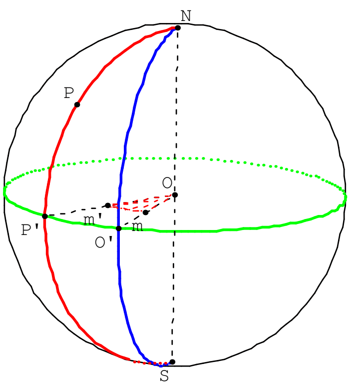
L'angle $O'\hat{O}P'$ sera toujours identique pour tous les points situés sur un même méridien.

Cet angle caractérise donc le méridien en question : c'est sa **LONGITUDE**.

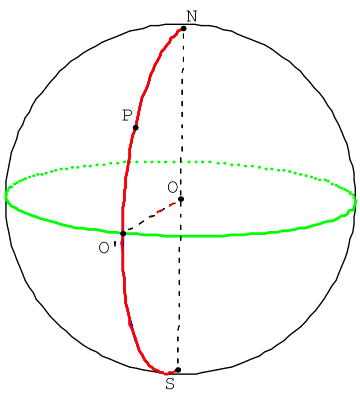
On la précise Est ou Ouest.



Longitude Est.



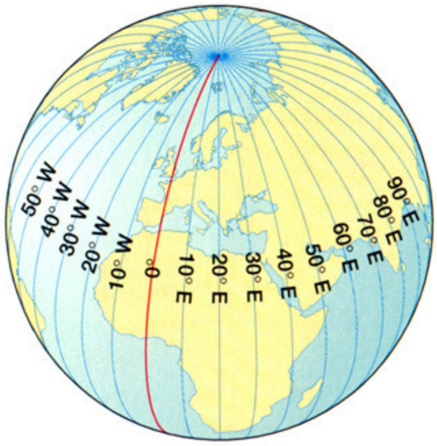
Longitude Ouest.



0° pour le méridien de Greenwich.

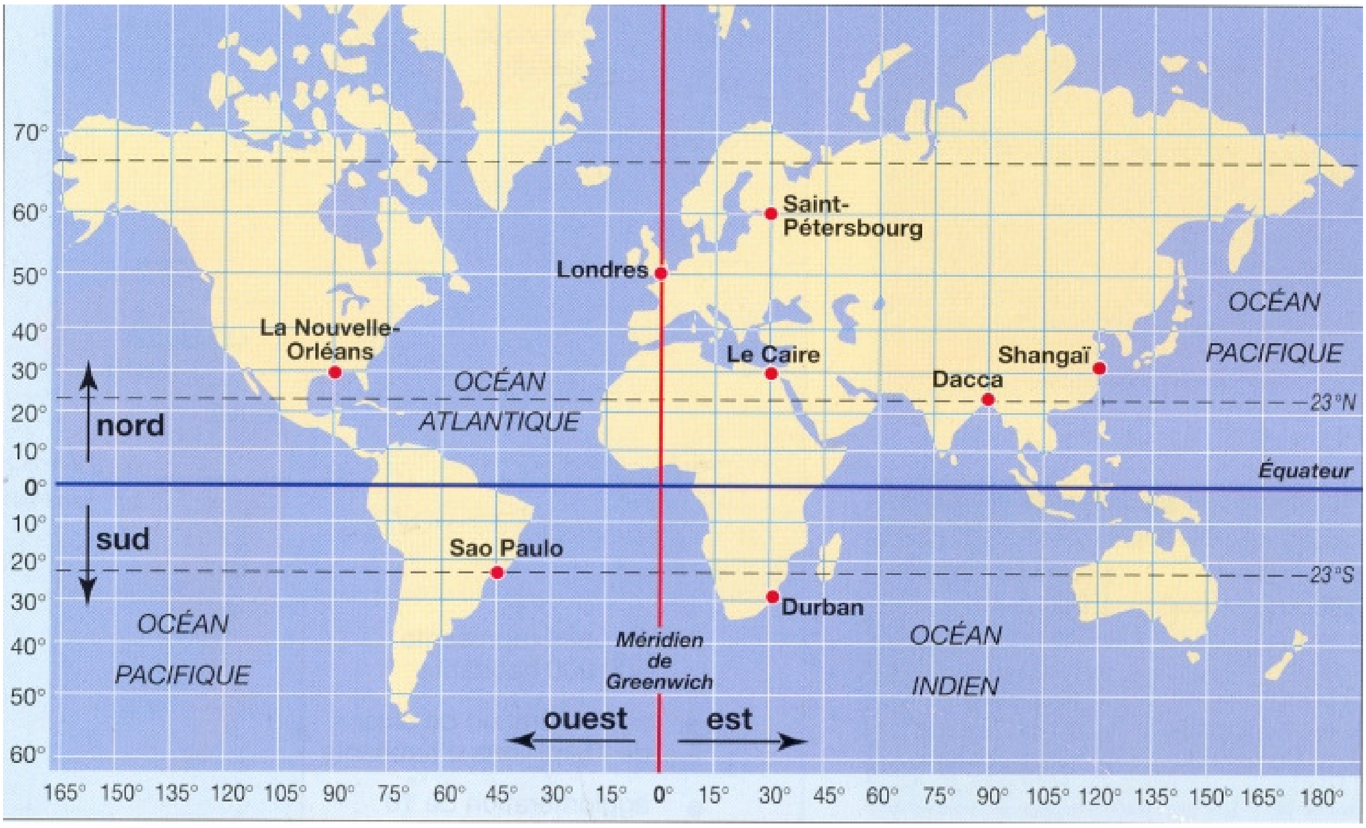
La longitude mesure l'angle entre un méridien et le méridien de Greenwich.
Elle varie de 0° à 180° Est et de 0° à 180 ° Ouest.

remarque : le méridien 180° Est est le même que le 180° Ouest.



c) Coordonnées géographiques :

Pour repérer un point, il suffit donc de donner sa longitude et sa latitude.
Comme dans le plan, il faut là-aussi connaître 2 nombres.



Exemples:

Londres : Latitude de 50° N ; longitude 0°.
Sao Paulo : Latitude de 23 ° Sud ; longitude de 45 ° Est.
Le Caire : 30° N ; 30° Est.

Il est inutile d'écrire latitude et longitude. La présence de N/S et O/E suffit.

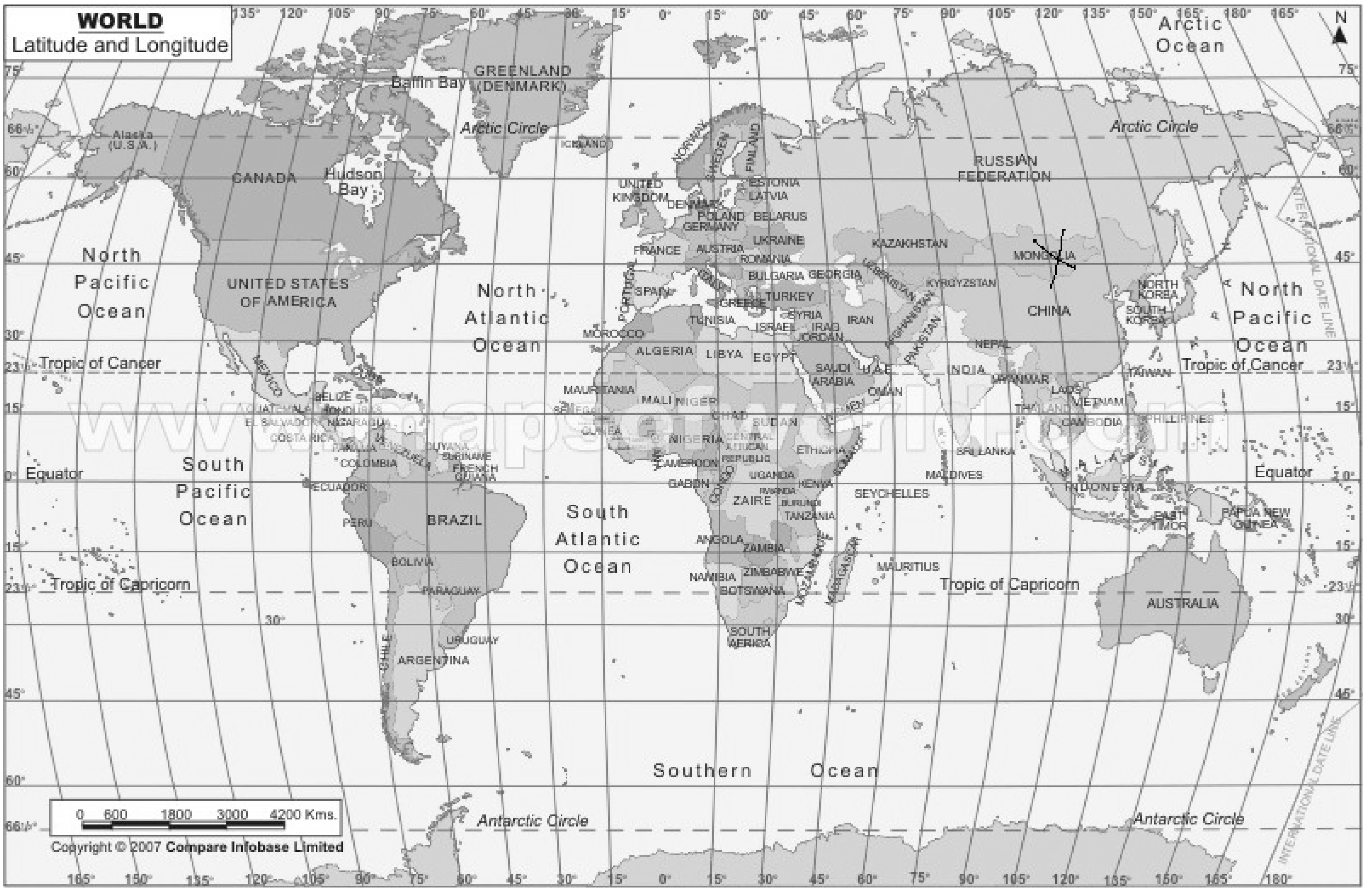
Exercices.

Exercice résolu n°1 :

a) Trouver les coordonnées géographiques de la ville de Oulan-Bator.
b) Situer alors Oulan-Bator sur la carte du monde.

a. *Une recherche sur Internet donne : 47 ° N et 106°E.*

b. *Voir carte : Oulan-Bator : capitale de la Mongolie.*

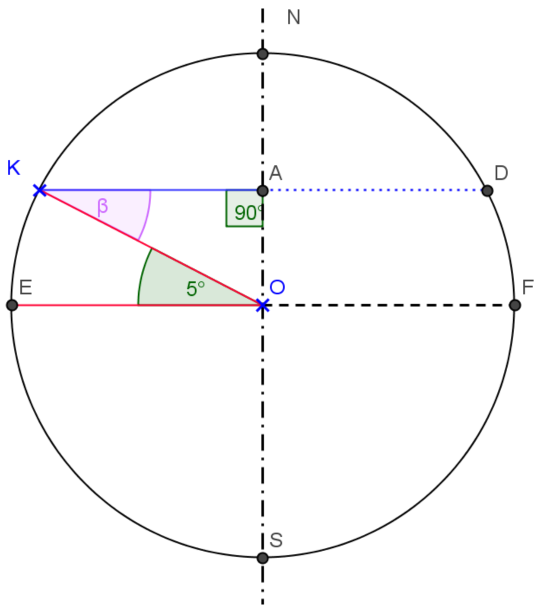


Exercice résolu N°2 :

Les fusées Ariane sont lancées depuis Kourou, en Guyane .
Les coordonnées géographiques de Kourou sont :5°N et 52° Ouest.
On prendra comme valeur du rayon terrestre : $R_T = 6370.km$

a. ***Calculer le rayon du parallèle de Kourou.***
b. ***Calculer la vitesse d'entraînement, en m/s, d'un point quelconque de ce parallèle en raison de la rotation de la Terre sur son axe.***

a) *Un croquis s'impose :*



Coupe par l'axe des pôles et par le méridien de Kourou.

(NS): axe des pôles.

O: centre de la Terre. K: Kourou.

E: point de l'équateur sur le méridien de Kourou.

KA: rayon du parallèle de Kourou.

1) Par définition, les parallèles sont issus de sections toutes perpendiculaires à l'axe des pôles. Les droites (KD) et (EF) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (NS).

Or : deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles.

On a donc : (KD)//(EF).

2) Travail sur les angles $A\hat{K}O$ *et* $K\hat{O}E$ *: Ces angles sont alternes-internes. Comme les droites (KA) et (OE) sont parallèles, ils sont donc égaux.*

3) Pour cacluler AK : Plaçons-nous dans le triangle KAO rectangle en A et utilisons de la trigonométrie.

$$\cos(\beta) = \frac{AK}{OK} \Rightarrow \cos(5°) = \frac{AK}{6370} \Rightarrow AK = 6370 \times \cos(5°).km \approx 6346.km$$

b) *Vitesse d'entrainement : Un point du parallèle fait un tour complet en 24 h, soit un périmètre de cercle de rayon AK.*

$$V = \frac{d}{t} = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi \times AK}{t} = \frac{2\pi \times 6370 \times \cos(5°).km}{24.h} = \frac{2\pi \times 6370 \times \cos(5°) \times 1000.mètres}{24 \times 3600.\sec ondes}$$

$$V \approx 461.m/s$$

Exercice non résolu n°1 : *Un marin fait une petite croisière en deux étapes.*

Départ : 49°N 3°Ouest.

Il navigue en restant sur le même parallèle et arrive en un point A de coordonnées 49°N 15°Ouest.

A partir de A, il navigue plein sud en suivant son méridien et arrive en B : 40° N 15 ° Ouest.

a) Calculer la longueur totale du voyage au km près.

b) *Mille nautique : unité pour les distances en navigation maritime correspondant à la distance entre deux points de la Terre ayant même longitude et dont la latitude diffère d'un soixantième de degré. (1/60 de ° = une minute de degré.)*

Calculer la longueur du voyage en mille nautique à l'unité près.

Exercice non résolu n°2 *: On appelle les antipodes d'un point terrestre le point qui lui est diamétralement opposé.*

a) Trouver les coordonnées géographiques de Plouescat.

b) Calculer les coordonnées géographiques des antipodes de Plouescat.

c) ***Les situer approximativement sur la carte.***