Identités remarquables.
Equation ab = 0.Equation $x^2 = a$

1. Rappels 4ème : Développement-Suppression des parenthèses- Factorisation- Réduction- Pour les curieux : algèbre et géométrie.

2. Carré d'une somme.

3. Carré d'une différence.

4. Différence de 2 carrés.

5. Equation produit : ab=0.

6. Cas particulier : équation $x^2 = a$

7. Exercices corrigés.

8. Exercices non corrigés.

9. Activité complète :

   Pythagore, racine carrée et identité remarquable.

Rappels 4ème.

1) Développement :

a) Traduction : développer une expression consiste à transformer un produit en une somme de terme.

$A = 2(3x+5)$ est le produit du facteur 2 et du facteur $(3x+5)$, qui est une somme. A peut être développé.

$B = 3x(2x-5)$ est le produit de $3x$ par le facteur $(2x-5)$, qui est une différence. B peut être développé.

$C = (2x+4)(2x-6)+(3x+1)\left(\frac{x}{4}-2\right)$.

L'analyse des priorités opératoires de l'expression C permet de conclure quant à la nature de C. Amusons-nous à calculer C en donnant à la variable x la valeur 0.

Si $x = 0$:

$$C = (2x+4)(2x-6)+(3x+1)\left(\frac{x}{4}-2\right)$$
$$C = (2\times 0+4)\times(2\times 0-6)+(3\times 0+1)\times\left(\frac{0}{4}-2\right)$$
$$C = (0+4)\times(0-6)+(0+1)\times(0-2)$$
$$C = 4\times(-6)+1\times(-2)$$
$$C = -24-2 = -26$$

Ainsi : la dernière opération à effectuer est la somme des termes -24 et -2 : C est donc une somme.

Mais les termes de cette somme sont eux-mêmes 2 produits qui chacun peuvent être développés !

b. Technique de développement : il faut maîtriser la règle des signes et les écritures réduites des produits.

La base de 5ème :
$$k(a+b) = ka+kb$$
$$k(a-b) = ka-kb$$

Arrive la 4ème et ses variantes :

Première variation : sur le thème des signes :

$(-)\times(+)$ et $(+)\times(-)$ donnent $(-)$

$(-)\times(-)$ et $(+)\times(+)$ donnent $(+)$

$$-k(a+b)=-ka-kb$$
$$-k(a-b)=-ka+kb$$
$$-k(-a+b)=ka-kb$$

e.t.c.

Seconde variation :

Sur le thème des écritures réduites d'un produit : $x^n \times x^m = x^{n+m}$ *et* $x = x^1$ *:*

$A=-2x(3x-8)=-6x^2+16x$

$-2x\times 3x$ *: - fois + donne - ; 2 fois 3 donne 6 ; x fois x donne x² donc* $-2x\times 3x=-6x^2$

$-2x\times(-8)$ *: - fois – donne + ; 2x fois 8 donne 16x donc* $-2x\times(-8)=+16x$

$B-\frac{2x^2}{3}\left(-3+\frac{x}{2}\right)=2x^2-\frac{x^3}{3}$

$-\frac{2x^2}{3}\times(-3)$ *: - fois – donne + ;* $\frac{2}{3}\times 3=2$ *donc* $-\frac{2x^2}{3}\times(-3)=2x^2$

$-\frac{2x^2}{3}\times\left(+\frac{x}{2}\right)$ *: - fois + donne - ;* $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ *et* $x^2\times x=x^3$ *donc* $-\frac{2x^2}{3}\times\left(+\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{3}x^3=-\frac{x^3}{3}$

Troisième variation :

Sur le thème d'un produit de deux facteurs étant eux-mêmes des sommes.

Reprenons la 5ème : $k(a+b)=(a+b)k=ak+bk$ *. Supposons maintenant que* $k=(c+d)$

Nous obtenons donc :

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Evidement : Une belle partition contiendra toutes ses variations…

Exemples : Les simplifications de produits de fractions ne sont pas expliquées : utilise tes tables pour les deviner.

$A=(3x+2)(-2x+6)=-6x^2+18x-4x+12......B=\left(\frac{2x}{5}-4\right)\left(\frac{5x}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{5}-5x-6$

2) Suppression de parenthèses : Il s'agit en fait d'une application triviale (très simple) de développement.

Premier cas : Somme dans des parenthèses précédées du signe +.

Il suffit de considérer le + comme un facteur +1 et il faut ensuite développer.

Or : multiplier par +1 est invariant ! Le développement a pour résultat le contenu des parenthèses.

$$+(a+b+c+d+etc...)=+1\times(a+b+etc...)=+1\times a+1\times b+etc..=a+b+etc...$$

<u>Second cas</u> : Somme dans des parenthèses précédées du signe -.

Il suffit de considérer le - comme un facteur -1 et il faut ensuite développer.

Or : multiplier par -1 consiste à calculer l'opposé ! Le développement a pour résultat la somme des opposés des termes figurant dans les parenthèses.

$$-(a+b+c+d+etc...)=-1\times(a+b+etc...)=-1\times a-1\times b+etc..=-a-b...$$

Conclusion : pour supprimer des parenthèses contenant une somme devant lesquelles il y a un signe - : il suffit de réécrire simplement les opposés des termes.

Exemples :
$$A=+(-2x+3y^2-7x)-(-7x+2z+6g)+(4y-8)-(3t+u)$$
$$A=-2x+3y^2-7x+7x-2z-6g+4y-8-3t-u$$

ATTENTION : il s'agit de parenthèses contenant une somme qui ne joue pas le rôle de facteur d'un produit !

Surtout ne pas changer des signes à la va-vite au prétexte qu'il y a un signe – devant des parenthèses !

Ecrire : $A=-(-3x+1)(-2x+2)=(3x-1)(2x-2)$ est faux !

Pourquoi ? N'oublions pas que ce « - » est en réalité un facteur « -1 » qui s'ignore…donc :

$$A=-(-3x+1)(-2x+2)=-1\times(-3x+1)\times(-2x+2)$$

Or : tu sais depuis longtemps que tu peux faire un produit de 3 facteurs de bien des manières…
$2\times3\times5=6\times5=3\times10$: le facteur 2 s'applique soit à 3, soit à 5, mais en aucun cas à 2 et à 5 en même-temps.

Pour les mêmes raisons, soit tu multiplies $(-3x+1)$ par (-1), soit tu multiplies $(-2x+2)$ par (-1), mais en aucun cas les deux : sinon tu multiplierais par $(-1)\times(-1)=1$ alors que tu souhaites multiplier par (-1).

En conclusion : $A=-(-3x+1)(-2x+2)=(3x-1)(-2x+2)=(-3x+1)(2x-2)$: soit l'opposé du 1er facteur, soit l'opposé du second, mais pas les deux opposés !

3) Factorisations : Transformer une somme en produit.

a) Niveau 5ème : $ka + kb = k(a+b)$: il te faut identifier k, le facteur commun.
Exemples :

$a = 3a + 3y = 3(a+y)$
$b = 6 - 3x = 3\times 2 - 3\times x = 3(2-x)$
$c = 14x + 7 = 7\times 2x + 7\times 1 = 7(2x+1)$
$d = \frac{3x}{2} + \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\times 3x + \frac{1}{2}\times\frac{5}{2} = \frac{1}{2}\left(3x + \frac{5}{2}\right)$

b) Cas particulier : les réductions.
Les réductions sont des factorisations partielles au sein d'une somme.

$a = 3x + 2x = x\times(3+2) = 5x$
$b = 7t - t = 7\times t - 1\times t = t\times(7-1) = 6t$

$c = 8x - 7 + 2x + 3$ On a ici des multiples de la variable x et des multiples de l'unité :
$c = 10x - 4$ on factorise 8x+2x=10x et on calcule -7+3= -4

$d = 5x^2 - 3x + 1 - 4x^2 + 3x + 2 = x^2\times(5-4) + x\times(-3+3) + 3 = x^2 + 3$

c) 4ème /3ème : Attention aux parenthèses devant lesquelles il y aura du + ou du -.

$A = (2x-1)(3x+2) + (2x-1)(-4x+3)$ Facteur commun : $(2x-1)$
$A = (2x-1)\times[(3x+2) + (-4x+3)]$ Supprimer les ( ) dans les [ ]
$A = (2x-1)\times[3x+2-4x+3]$ Réduire le contenu des [ ]
$A = (2x-1)(-x+5)$ Surtout ne pas développer ! Fin !

$B = (3x+2)(4x-1) - (2x+5)(4x-1)$ Facteur commun : $(4x-1)$
$B = (4x-1)\times[(3x+2) - (2x+5)]$ Ecrire (3x+2) en 1er dans les [ ] !
$B = (4x-1)\times[3x+2-2x-5]$ Supprimer les ( ) puis réduire.
$B = (4x-1)(x-3)$ Fin !

$C = -(2x-1)(3x+1) + (2x-1)(-x+2)$ Facteur commun : $(2x-1)$
$C = (2x-1)\times[-(3x+1) + (-x+2)]$

$$C=(2x-1)\times[-3x-1-x+2]$$
$$C=(2x-1)(-4x+1)$$

$C=-(2x-1)(3x+1)+(2x-1)(-x+2)$ Mais on peut prendre aussi $-(2x-1)$

$C=-(2x-1)\times(3x+1)-(2x-1)\times(-1)\times(-x+2)$ Car $(-)\times(-)$ redonne le $(+)$ de départ !

$$C=-(2x-1)\left[(3x+1)-(-x+2)\right]$$
$$C=-(2x-1)[3x+1+x-2]$$
$$C=-(2x-1)(4x-1)$$

4) Pour les curieux : Géométrie et algèbre :
Voici une jolie formule qui va nous être utile en géométrie…

Cherchons une formule pour calculer $S_n(x)$ la somme des puissances successives d'un nombre quelconque x, l'exposant allant de 0 à une valeur maximale notée n.

Exemple :
$$S_8(2)=2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^8=1+2+4+8+16+32+64+128+256$$

Si tu es curieux, voici comment les mathématiciens notent une telle somme : $\sum_{i=0}^{i=8} 2^i$

Pour trouver sans problème, voici un petit développement bien utile :

$$A=(1-x)(1+x+x^2+x^3\ldots\ldots\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}+x^n)$$
$$A=1+x+x^2\ldots..+x^{n-2}+x^{n-1}+x^n-x-x^2-x^3-\ldots-x\times x^{n-2}-x\times x^{n-1}-x\times x^n$$
$$A=1+x+\ldots.+x^{n-1}+x^n-x-x^2-\ldots.-x^{n-1}-x^n-x^{n+1}$$
$$A=1-x^{n+1}$$

Or : $1=x^0$ et $x=x^1$ Donc :
$$(1-x)(x^0+x^1+x^2+\ldots..+x^n)=1-x^{n+1}$$
$$x^0+x^1+x^2+\ldots..+x^n=\sum_{i=0}^{i=n} x^i=S_n(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

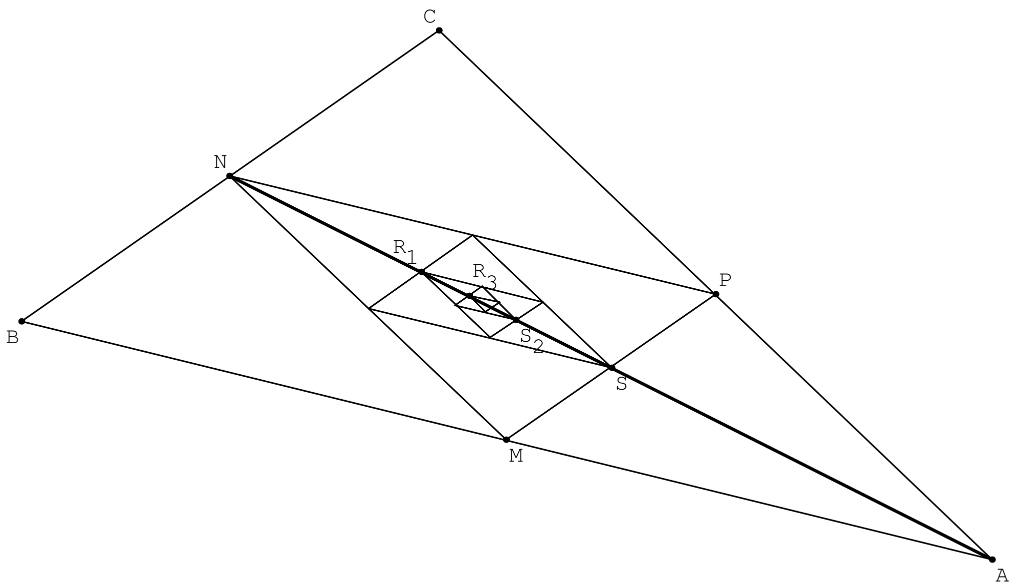
Voici donc notre formule : $x^0+x^1+x^2+\ldots..+x^n=\sum_{i=0}^{i=n} x^i=S_n(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$S_8(2)=2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^8=\frac{1-2^9}{1-2}=\frac{1-512}{-1}=511$$

$$S_{10}\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1-\frac{2^{11}}{3^{11}}}{\frac{3}{3}-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{3^{11}-2^{11}}{3^{11}}}{\frac{1}{3}}=\frac{3^{11}-2^{11}}{3^{11}}\times 3=\frac{3^{11}-2^{11}}{3^{10}}=\frac{175099}{59049}.$$

Je vois d'ici-là votre intérêt. « Mais à quoi ça sert ? »

Allons du côté du triangle et construisons par itération des triangles dans le triangle en rejoignant les milieux des côtés. (Voir figure). Où arrive-t-on si on fait cela à l'infini ?



Comme tu l'as deviné, au point de concourance des trois médianes du triangle, son centre de gravité, qui est situé au 2/3 des médianes en partant des sommets du triangle.

Et c'est ce 2/3 que notre formule démontre…

Supposons que la longueur AN = 1. En appliquant le théorème de la droite des milieux de manière successive, $AS=\frac{1}{2}$, $SR_1=\frac{1}{2}\div 2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $R_1S_2=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, etc…

Ainsi, pour avoir la longueur entre A et le point limite obtenu en répétant à l'infini notre démarche, il faudrait calculer :

$$l=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots=\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{3.}+\ldots.+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour } n\to+\infty.$$

Soit : $l=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1-\frac{1^{n+1}}{(-2)^{n+1}}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1-\frac{1}{(-2)^{n+1}}}{\frac{3}{2}}$

Or : si n est un très grand nombre, $\frac{1}{(-2)^{n+1}}$ est très petit : une quantité négligeable assimilée à 0.

Finalement : l tend vers la valeur : $l \approx \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$

Les matheux disent que la limite de l quand n tend vers + l'infini $(+\infty)$ est égal à $\frac{2}{3}$.

CARRE D'UNE SOMME.

Formule : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La quantité 2ab est appelée double-produit.

1. Des exemples de développements :

$A = (x+2)^2 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2$
$A = x^2 + 4x + 4$

$B = (3y+1)^2 = (3y)^2 + 2 \times 3y \times 1 + 1^2$
$B = 9y^2 + 6y + 1$

Attention au carré de 3y

$C = \left(\sqrt{7}+3\right)^2$
$C = \sqrt{7}^2 + 2 \times \sqrt{7} \times 3 + 3$
$C = 7 + 6\sqrt{7} + 9$
$C = 15 + 6\sqrt{7}$

Attention à $\sqrt{7}^2$.

Attention : ne pas calculer 15+6

$D = \left(\frac{2x}{3} + \frac{3}{4}\right)^2$
$D = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{2x}{3} \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$
$D = \frac{4x^2}{9} + x + \frac{9}{16}$

Attention au carré de $\left(\frac{2x}{3}\right)$

5ème : $2 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \ldots$

2. Des exemples de factorisations simples.

$E = x^2 + 2x + 1$
$E = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2$
$E = (x+1)^2$

$F = 100x^2 + 80x + 16$
$F = (10x)^2 + 2 \times 10x \times 4 + 4^2$
$F = (10x+4)^2$

$G = 7x^2 + 2\sqrt{21}x + 3$
$G = \left(\sqrt{7}x\right)^2 + 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} \times x + \sqrt{3}^2$
$G = \left(\sqrt{7}x + \sqrt{3}\right)^2$

3. Des exemples de consignes de D.N.B.

N°1 : On donne $E = \left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}\right)^2$ .Donner E sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont deux entiers relatifs.

$$E = \left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{6} + \left(3\sqrt{6}\right)^2$$
$$E = 4 \times 3 + 12 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3 \times 2} + 9 \times 6$$
$$E = 12 + 12 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + 54$$
$$E = 66 + 12 \times 3\sqrt{2}$$
$$E = 66 + 36\sqrt{2}$$

N°2 : ABC est un triangle rectangle en B. $AB = 10 + 5\sqrt{7}$ cm et $CB = 5 + 10\sqrt{7}$ cm. Calculer l'aire d'un carré de côté AC. Donner la valeur exacte sous la forme $a + b\sqrt{7}$ cm² puis la valeur approchée au mm² près.

Soit A l'aire d'un tel carré : $A = c^2$ avec c= côté du carré.
Or le côté du carré est l'hypoténuse du triangle ABC.

Conclusion :

$$A = c^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$A = \left(10 + 5\sqrt{7}\right)^2 + \left(5 + 10\sqrt{7}\right)^2$$
$$A = 10^2 + 2 \times 10 \times 5\sqrt{7} + \left(5\sqrt{7}\right)^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 10\sqrt{7} + \left(10\sqrt{7}\right)^2$$
$$A = 100 + 100\sqrt{7} + 25 \times 7 + 25 + 100\sqrt{7} + 100 \times 7$$
$$A = 100 + 100\sqrt{7} + 175 + 25 + 100\sqrt{7} + 700$$
$$A = 1000 + 200\sqrt{7}.cm^2$$
$$A \approx 1529{,}15.cm^2$$

Attention : 1 cm² = 100 mm² : la valeur approchée au mm² près d'un nombre de cm² est donc sa valeur approchée au 1/100$^{\text{ème}}$.

Exemple N°3 : On donne E $= (3x+2)^2 + (3x+2)(2x-1)$

- Calculer E pour $x = -2$

  Pour cela : remplacer x par -2 en replaçant tous les symboles $\times$ des écritures réduites des produits.

$E = (3\times(-2)+2)^2 + (3\times(-2)+2)\times(2\times(-2)-1)$
$E = (-6+2)^2 + (-6+2)\times(-4-1)$
$E = (-4)^2 + (-4)\times(-5)$
$E = 16+20 = 36$

- Développer E :

$E = (3x+2)^2 + (3x+2)(2x-1)$ — Attention au carré de $(3x)$
$E = (3x)^2 + 2\times 3x\times 2 + 2^2 + [6x^2 - 3x + 4x - 2]$ — Développer entre [ ] est plus sûr…
$E = 9x^2 + 12x + 4 + 6x^2 - 3x + 4x - 2$ — Suppression des [ ]
$E = 15x^2 + 13x + 2$ — Réduction. Fin

Remarque : on peut calculer cette expression pour $x = -2$ pour valider notre travail.

$15\times(-2)^2 + 13\times(-2) + 2 = 15\times 4 - 26 + 2 = 60 - 26 + 2 = 36...$

- Factoriser E :

$E = (3x+2)^2 + (3x+2)(2x-1)$ — Facteur commun : $(3x+2)$
$E = (3x+2)\times[(3x+2)+(2x-1)]$ — Laisser les ( ) dans les [ ] et les ôter.
$E = (3x+2)\times(3x+2+2x-1)$ — Réduire.
$E = (3x+2)(5x+1)$ Fin.

Remarque : on peut remplacer maintenant x par -2 pour valider notre travail :

$(3\times(-2)+2)\times(5\times(-2)+1) = (-6+2)\times(-10+1) = (-4)\times(-9) = 36...$

Exemple N°4 : On donne E= $(4x-1)(3x+2)-(3x+2)^2$

- Calculer E pour $x = 3$

$E = (4\times 3-1)\times(3\times 3+2) - (3\times 3+2)^2$
$E = (12-1)\times(9+2) - (9+2)^2$
$E = 11\times 11 - 11^2$
$E = 121 - 121 = 0$

- Développer E.

$E = (4x-1)(3x+2) - (3x+2)^2$
$E = 12x^2 + 8x - 3x - 2 - (9x^2 + 12x + 4)$ — Développer $(3x+2)^2$ dans des [ ] à cause du -.
$E = 12x^2 + 8x - 3x - 2 - 9x^2 - 12x - 4$ — Supprimer les [ ]
$E = 3x^2 - 7x - 6$ — Réduire. Fin. Calcule $3\times 3^2 - 7\times 3 - 6$…

- Factoriser E :

$E = (4x-1)(3x+2) - (3x+2)^2$ — Facteur commun : $(3x+2)$
$E = (3x+2)\times[(4x-1)-(3x+2)]$ — Ne pas changer l'ordre ! Attention au - !

$E=(3x+2)\times(4x-1-3x-2)$ Suppression des ( ) dans les [ ]

$E=(3x+2)(x-3)$ Fin. Calcule $(3\times 3+2)\times(3-3)\ldots$

CARRE D'UNE DIFFERENCE.

Formule : $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

La quantité 2ab est appelée double-produit.

1. Des exemples de développements :

$A=(x-2)^2=x^2-2\times x\times 2+2^2$

$A=x^2-4x+4$

$B=(3y-1)^2=(3y)^2-2\times 3y\times 1+1^2$

$B=9y^2-6y+1$

Attention au carré de 3y

$C=(\sqrt{7}-3)^2$

$C=\sqrt{7}^2-2\times\sqrt{7}\times 3+3$

$C=7-6\sqrt{7}+9$

$C=16-6\sqrt{7}$

Attention à $\sqrt{7}^2$.

Attention : ne pas calculer 15- 6

$D=\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}\right)^2$

$D=\left(\frac{2x}{3}\right)^2-2\times\frac{2x}{3}\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2$

Attention au carré de $\left(\frac{2x}{3}\right)$

$$D = \frac{4x^2}{9} - x + \frac{9}{16}$$

$5^{\text{ème}}$: $2 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \dots$

2. Des exemples de factorisations simples.

$$E = x^2 - 2x + 1$$
$$E = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2$$
$$E = (x-1)^2$$

$$F = 100x^2 - 80x + 16$$
$$F = (10x)^2 - 2 \times 10x \times 4 + 4^2$$
$$F = (10x - 4)^2$$

$$G = 7x^2 - 2\sqrt{21}x + 3$$
$$G = \left(\sqrt{7}x\right)^2 - 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} \times x + \sqrt{3}^2$$
$$G = \left(\sqrt{7}x - \sqrt{3}\right)^2$$

3. Des exemples de consignes de D.N.B.

N°1 : On donne $E = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{6}\right)^2$ .Donner E sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont deux entiers relatifs.

$$E = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{6}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{6} + \left(3\sqrt{6}\right)^2$$
$$E = 4 \times 3 - 12 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3 \times 2} + 9 \times 6$$
$$E = 12 - 12 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + 54$$
$$E = 66 - 12 \times 3\sqrt{2}$$
$$E = 66 - 36\sqrt{2}$$

N°2 : ABC est un triangle rectangle en B. $AB = 10 + 5\sqrt{7}$ cm et $CB = 10 - 5\sqrt{7}$ cm.
Calculer la longueur de son hypoténuse sous la forme $a\sqrt{b}.cm^2$ où a et b sont deux entiers naturels, b le plus petit possible. Donner les étapes qui aboutissent à cette écriture.

D'après le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en B :

$$BC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$BC^2 = \left(10 + 5\sqrt{7}\right)^2 + \left(10 - 5\sqrt{7}\right)^2$$
$$BC^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 5\sqrt{7} + \left(5\sqrt{7}\right)^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 5\sqrt{7} + \left(5\sqrt{7}\right)^2$$
$$BC^2 = 100 + 100\sqrt{7} + 25 \times 7 + 100 - 100\sqrt{7} + 25 \times 7$$
$$BC^2 = 100 + 175 + 100 + 175$$
$$BC^2 = 450.$$
$$BC = \sqrt{450}.cm^2 = \sqrt{9 \times 50}cm^2 = \sqrt{9 \times 25 \times 2}cm^2 = \sqrt{9} \times \sqrt{25} \times \sqrt{2}cm^2 = 3 \times 5 \times \sqrt{2}cm^2 = 15\sqrt{2}.cm^2$$

Exemple N°3 : On donne E $= (x-2)^2 - (x-2)(2x-1)$

- Calculer E pour $x = -1$

  Pour cela : remplacer x par -1 en replaçant tous les symboles $\times$ des écritures réduites des produits.

  $$E = (-1-2)^2 - (-1-2) \times (2 \times (-1) - 1)$$
  $$E = (-3)^2 - (-3) \times (-2 - 1)$$
  $$E = (-3)^2 - (-3) \times (-3)$$

$E = 9 - 9 = 0$

- Factoriser E :

$E = (x-2)^2 - (x-2)(2x-1)$ Facteur commun : $(x-2)$
$E = (x-2)\times[(x-2)-(2x-1)]$ Laisser les ( ) dans les [ ] et les ôter.
$E = (x-2)\times(x-2-2x+1)$ Réduire.
$E = (x-2)(-x-1)$ Fin.

Remarque : on peut remplacer maintenant x par -1 pour valider notre travail :
$(-1-2)\times(-(-1)-1) = (-3)\times(1-1) = (-3)\times 0 = 0...$

- Développer E :

$E = (x-2)^2 - (x-2)(2x-1)$
$E = x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2 - [2x^2 - x - 4x + 2]$ Développer $(x-2)(2x-1)$ dans des [ ]
$E = x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + x + 4x - 2$ Supprimer les [ ] avec – devant.
$E = -x^2 + x + 2$ Fin.

On peut encore valider notre travail en calculant : $-(-1)^2 + (-1) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0...$

Exemple N°4 : On donne E= $(4x-1)(3x-2)-(3x-2)^2$

- Calculer E pour $x = 3$

$E = (4\times 3-1)\times(3\times 3-2)-(3\times 3-2)^2$
$E = (12-1)\times(9-2)-(9-2)^2$
$E = 11\times 7 - 7^2$
$E = 77 - 49 = 28$

- Développer E.

$E = (4x-1)(3x-2)-(3x-2)^2$
$E = 12x^2 - 8x - 3x + 2 - (9x^2 - 12x + 4)$ Développer $(3x-2)^2$ dans des [ ] à cause du -.
$E = 12x^2 - 8x - 3x + 2 - 9x^2 + 12x - 4$ Supprimer les [ ]
$E = 3x^2 + x - 2$ Réduire. Fin. Calcule $3\times 3^2 + 3 - 2 \ldots$

- Factoriser E :

$E = (4x-1)(3x-2)-(3x-2)^2$ Facteur commun : $(3x-2)$
$E = (3x-2)\times[(4x-1)-(3x-2)]$ Ne pas changer l'ordre ! Attention au - !
$E = (3x-2)\times(4x-1-3x+2)$ Suppression des ( ) dans les [ ]
$E = (3x-2)(x+1)$ Fin. Calcule $(3\times 3-2)\times(3+1)\ldots$

Différence de 2 carrés.

Formule : $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

1. Des exemples de développements : identifier qui est a et qui est b.

$a = 1 \qquad b = x$

$A = (1+x)(1-x)$

$A = 1^2 - x^2$

$A = 1 - x^2$

$a = 2x \qquad b = \sqrt{3}$

$B = (2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$

$B = (2x)^2 - \sqrt{3}^2$

$B = 4x^2 - 3$

$a = \sqrt{\pi + 1} \qquad b = \sqrt{\pi}$

$C = (\sqrt{\pi+1} + \sqrt{\pi})(\sqrt{\pi+1} - \sqrt{\pi})$

$C = \sqrt{\pi+1}^2 - \sqrt{\pi}^2$

$C = \pi + 1 - \pi = 1$

2. Des exemples de factorisations :

Il faut remarquer que l'expression est une différence de 2 termes et que chaque terme est le carré d'une certaine quantité. Parfois les carrés sont visibles par la présence de l'exposant « 2 », parfois c'est à toi de remarquer que cette quantité est le carré d'une autre.

$E = x^2 - y^2$	Différence de deux termes.
$E = (x+y)(x-y)$	Chaque terme étant des carrés évidents.

$F = 36t^2 - 49$	Différence de 2 termes.
$F = (6t)^2 - 7^2$	Chaque terme étant les carrés de 2 quantités à deviner.
$F = (6t+7)(6t-7)$	

$G = 81 - (3x-2)^2$	Différence de 2 termes.
$G = 9^2 - (3x-2)^2$	Un carré évident, un autre à faire apparaître.
$G = [9 + (3x-2)] \times [9 - (3x-2)]$	[ ] et ( ) indispensables pour les réductions !
$G = (9 + 3x - 2)(9 - 3x + 2)$	Attention au « - » dans les [ ] de droite.
$G = (7 + 3x)(11 - 3x)$	Réduction. Fin. Surtout ne pas développer !

$H = 4(x+1)^2 - (x-1)^2$	Différence de 2 termes.
$H = [2(x+1)]^2 - (x-1)^2$	Bien penser que $a^2b^2 = (ab)^2$
$H = [2(x+1) + (x-1)] \times [2(x+1) - (x-1)]$	[ ] et ( ) indispensables.
$H = (2x + 2 + x - 1) \times (2x + 1 - x + 1)$	Développements et suppressions des ( ).
$H = (3x-1)(x+2)$	Réduction. Fin.

3. Des exemples de consignes D.N.B.

Exemple N°1 : On donne $E=(3x-2)^2-9$

- Calculer E pour $x=-\frac{4}{9}$

$$E=\left(3\times\left(-\frac{4}{9}\right)-2\right)^2-9$$
$$E=\left(-\frac{3\times 4}{9}-2\right)^2-9$$
$$E=\left(-\frac{4}{3}-\frac{6}{3}\right)^2-9$$
$$E=\left(-\frac{10}{3}\right)^2-9$$
$$E=\frac{100}{9}-\frac{81}{9}=\frac{19}{9}$$

- Développer E : *Utilisation de* $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ *pour développer* $(3x-2)^2$

$$E=(3x-2)^2-9$$
$$E=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2-9$$
$$E=9x^2-12x+4-9$$
$$E=9x^2-12x-5$$

- Factoriser E : *Utilisation de* $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ *avec* $a=(3x-2)$ *et* $b=3$

$$E=(3x-2)^2-9$$
$$E=(3x-2)^2-3^2$$
$$E=(3x-2+3)(3x-2-3)$$
$$E=(3x+1)(3x-5)$$

Exemple N°2 :

- Choisir 2 nombres dont la différence est égale à 2.
  Calculer la différence de leur carré.
  Calculer la moyenne des deux nombres choisis.
  Calculer 4 fois cette moyenne.

Recommencer le même programme de calcul avec deux autres nombres de départ.

Que remarques-tu ?

a) Si on choisit comme nombre de départ 3 et 1 :

$3^2-1^2=9-1=8$

La moyenne de 3 et 1 vaut $\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$ et $4\times 2=8$

b) si on choisit maintenant 10 et 8 :

$10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

La moyenne de 10 et de 8 vaut 9 et $4 \times 9 = 36$

c) il semble donc que la différence des carrés de 2 nombres dont la différence est égale à 2 soit égale au quadruple de leur moyenne.

- Justifier cette hypothèse.

Soit x un nombre quelconque.

$x+1$ et $x-1$ sont deux nombres dont la différence vaut : $(x+1)-(x-1) = x+1-x+1 = 2$

et dont la moyenne vaut :

$$\frac{(x+1)+(x-1)}{2} = \frac{x+1+x-1}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

On a alors :

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = [(x+1)+(x-1)] \times [(x+1)-(x-1)] = (x+1+x-1)(x+1-x+1) = 2x \times 2 = 4x$$

C.Q.F.D.

Remarque : on peut le démontrer non-pas en factorisant la différence des deux carrés mais en développant $(x+1)^2$ ainsi que $(x-1)^2$.

$$D = (x+1)^2 - (x-1)^2$$
$$D = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 - [x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2]$$
$$D = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1$$
$$D = 4x$$

Exemple N°3 :

ABC est un triangle rectangle en B avec $AB = 3\sqrt{2} + 4$ cm et $AC = 3\sqrt{2} - 4$ cm
Démontrer que sont aire est un nombre entier.

$$A = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)}{2} = \frac{(3\sqrt{2})^2 - 4^2}{2} = \frac{9 \times 2 - 16}{2} = \frac{18-16}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}^2.$$

Equation produit ab = 0.

L'essentiel : Un produit est nul si un de ses facteurs est égal à zéro.

Réciproquement : Si un facteur d'un produit est égal à zéro, le produit est nul.

$$\boxed{ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ ou \\ b = 0 \end{cases}}$$

Appliquons cela aux activités vues précédemment en complétant les consignes types D.N.B

1. On donne E $= (3x+2)^2 + (3x+2)(2x-1)$

   La factorisation donne :

   $E = (3x+2)^2 + (3x+2)(2x-1)$
   $E = (3x+2)(5x+1)$

   Au D.N.B, il peut arriver en fin d'exercice qu'arrive cette question :

   Résoudre l'équation $(3x+2)(5x+1) = 0$.

   Premier point : profitez alors de cette question pour vérifier votre factorisation, car l'expression à annuler est alors très souvent la réponse à la factorisation demandée.

   Second point : résoudre l'équation se fait en 2 étapes : comme il faut annuler un produit de deux facteurs, il faut les annuler chacun leur tour : il y a donc deux équations à résoudre !

$$(3x+2)(5x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=0 \\ ou \\ 5x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-2 \\ ou \\ 5x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ ou \\ x=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Conclusion : les solutions de l'équation $(3x+2)(5x+1)=0$ sont $x=-\frac{2}{3}$ et $x=-\frac{1}{5}$.

2. **<u>Résoudre l'équation</u>** $E=(3x-2)(x-3)$

$$(3x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \\ ou \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \\ ou \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ ou \\ x=3 \end{cases}$$

Conclusion : les solutions de l'équation $(3x-2)(x-3)=0$ sont $x=\frac{2}{3}$ et $x=3$.

3. **<u>Résoudre l'équation</u>** $(3x+1)(3x-5)=0$

$$(3x+1)(3x-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \\ ou \\ 3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-1 \\ ou \\ 3x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ ou \\ x=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Conclusion : les solutions de l'équation $(3x+1)(3x-5)=0$ sont $x=-\frac{1}{3}$ et $x=\frac{5}{3}$.

4. **<u>Remarques</u>** :

Si on reprend le travail ci-dessus :

$(3x+1)(3x-5)=9x^2-15x+3x-5=9x^2-12x-5$

Il y a donc équivalence à résoudre $(3x+1)(3x-5)=0$ et résoudre $9x^2-12x-5=0$.

ATTENTION : dans $9x^2-12x-5=0$, l'inconnu x est élevée au carré ! L'équation est dite équation du SECOND degré. TU NE PEUX PAS LA RESOUDRE SOUS CETTE FORME AVEC TES CONNAISSANCES DE 3ème A CAUSE DU TERME « $-12x$ ».

IL TE FAUT ATTENDRE LA SECONDE !

EQUATION du type $x^2 = a$

1. **Si $a < 0$:**

   Tu sais que le carré d'un nombre est toujours positif en raison de la règle des signes d'un produit de 2 facteurs :

   $(+)\times(+) \Rightarrow (+)$ **et** $(-)\times(-) \Rightarrow (+)$

   En conséquence : **Si $a < 0$: l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.**

2. **Si a = 0** $x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0$

   Pour annuler un produit, il faut annuler ses facteurs.
   Comme ici les deux facteurs sont égaux, on a simplement :

   $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **L'équation a une solution : $x = 0$.**

3. **Si a > 0 :**
   Tu sais alors qu'il existe un nombre dont la carré est égal au nombre a : $\sqrt{a}^2 = a$.

   On peut donc transformer l'équation de départ en une nouvelle qui lui est identique quant aux solutions :

   $x^2 = a \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{a}^2$

   En soustrayant aux deux membres le même nombre, on obtient :

   $$x^2 = a$$
   $$x^2 = \sqrt{a}^2$$
   $$x^2 - \sqrt{a}^2 = \sqrt{a}^2 - \sqrt{a}^2$$
   $$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$

   on reconnaît maintenant une différence de 2 carrés que l'on factorise en :

   $$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$
   $$\left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0$$

   Et on retombe sur une équation produit à annuler, ce que l'on sait faire !

$$(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{a}=0 \\ ou \\ x-\sqrt{a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{a} \\ ou \\ x=\sqrt{a} \end{cases}$$ **. L'équation admet alors 2 solutions.**

4. **Résumé :**

- **Si a < 0 : l'équation x ² = a n'a pas de solution.**
- **Si a = 0 : l'équation x² = a admet pour solution unique x = 0.**
- **Si a > 0 : l'équation x ² = a admet deux solutions :** $x=\sqrt{a}$ **et** $x=-\sqrt{a}$

5. **Applications :**

N°1 : Résoudre l'équation $x^2=7$: $x^2=7 \Leftrightarrow x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$.

N°2 : Résoudre l'équation $25x^2=81 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{81}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{81}{25}}=\dfrac{9}{5} \\ ou \\ x=-\sqrt{\dfrac{81}{25}}=-\dfrac{9}{5} \end{cases}$

N°3 : Résoudre $16x^2=5 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{5}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{5}{16}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4} \\ ou \\ x=-\sqrt{\dfrac{5}{16}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{cases}$

N°4 : Résoudre $5x^2=6 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{6}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{6}{5}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5} \\ ou \\ x=-\sqrt{\dfrac{6}{5}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{30}}{5} \end{cases}$

N°6 : Attention à ne pas prendre la solution négative si celle-ci est absurde dans le contexte !

Exemple : Calculer le rayon, au cm près, d'une sphère de 400 m² d'aire.

$$4\pi r^2=400 \Leftrightarrow r^2=\frac{400}{4\pi}=\frac{100}{\pi} \Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{100}{\pi}}=\frac{10}{\sqrt{\pi}}=\frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}\approx 5{,}64 \text{ m.}$$

Il est évident que la solution $-\dfrac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$ est à rejeter puisqu'une distance est toujours positive.

EXERCICES CORRIGES

N°1 : On donne $E=(2x+3)^2-(x-3)^2$

a) Calculer E pour $x=-1$

$E=(2x+3)^2-(x-3)^2$
$E=(2\times(-1)+3)^2-(-1-3)^2$
$E=(-2+3)^2-(-4)^2$
$E=1^2-16$
$E=1-16$
$E=-15$

b) Développer E.

$E=(2x+3)^2-(x-3)^2$
$E=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2-[x^2-2\times x\times 3+3^2]$
$E=4x^2+12x+9-[x^2-6x+9]$
$E=4x^2+12x+9-x^2+6x-9$
$E=3x^2+18x$

c) Factoriser E.

$E=(2x+3)^2-(x-3)^2$
$E=[(2x+3)+(x-3)]\times[(2x+3)-(x-3)]$
$E=(2x+3+x-3)\times(2x+3-x+3)$
$E=3x(x+6)$

> Remarque : ce résultat peut s'obtenir à partir de la forme développée de E :
>
> $E=3x^2+18x$
> $E=3x\times x+3x\times 6$
> $E=3x(x+6)$

d) Résoudre l'équation $E=0$

Pour résoudre cette équation, tu es obligé d'utiliser la forme factorisée :

$$E=0 \Leftrightarrow 3x(x+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ou \\ x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ou \\ x=-6 \end{cases}$$

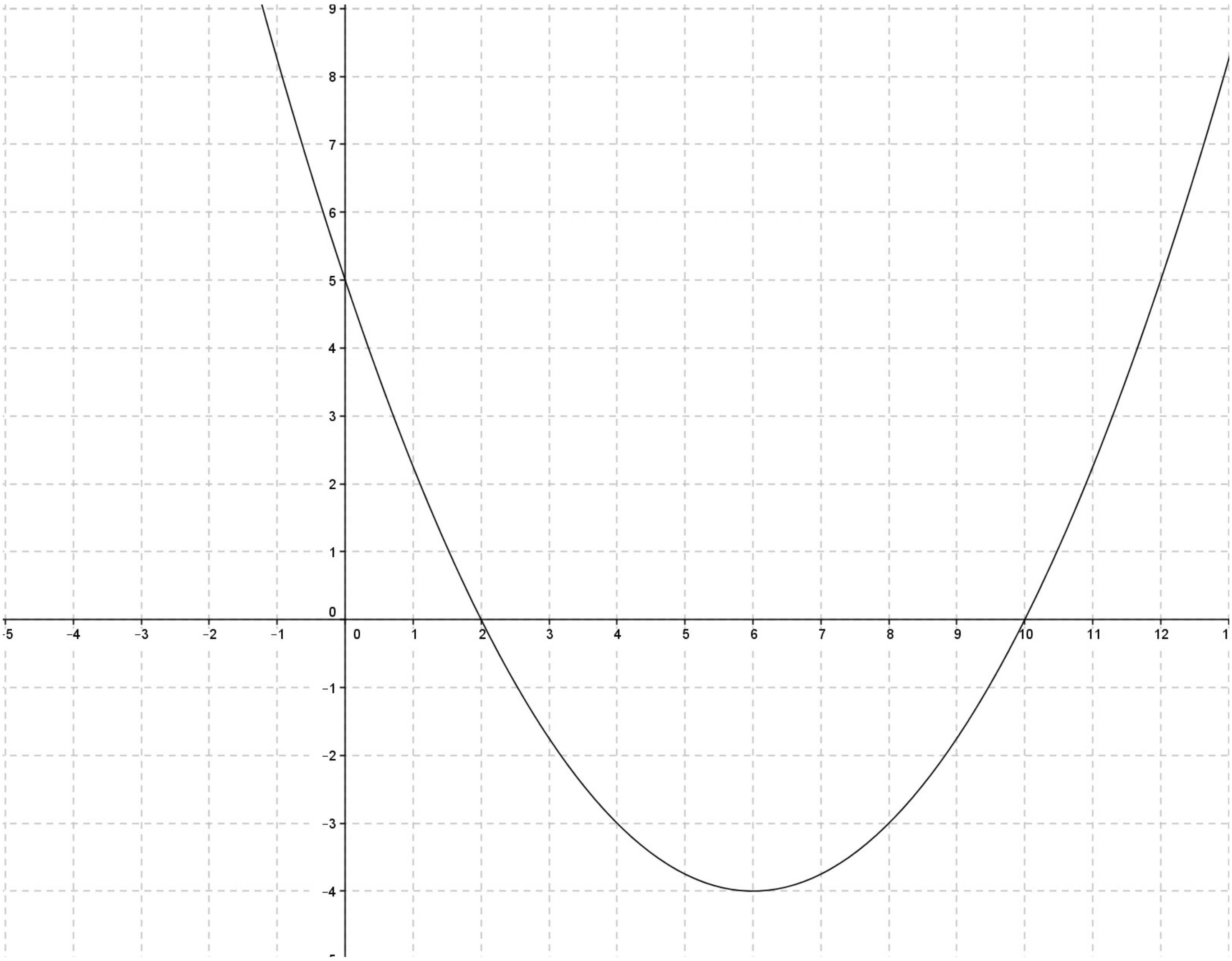
e) Que peut-on dire de ces 3 fonctions ?

$f : x \rightarrow (2x+3)^2-(x-3)^2$
$g : x \rightarrow 3x(x-6)$
$h : x \rightarrow 3x^2-18x$

> Ces trois fonctions sont identiques :
> $f(x)$ est l'image de x définie par l'écriture de E dans l'énoncé.
> $g(x)$ est l'image de x correspondant à la forme factorisée de E.
> $h(x)$ est l'image de x correspondant à la forme développée de E.

Exercice N°2 : Non résolu.

On considère la fonction $f : x \to \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 - 4$ et sa courbe représentative ci-dessous.



a) Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(6)$: $f(0) = 5$ $f(6) = -4$

b) Retrouver ces résultats par le calcul :

$f(0) = \left(\frac{0}{2} - 3\right)^2 - 4 = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$ $f(0) = \left(\frac{6}{2} - 3\right)^2 - 4 = (3-3)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$

c) Déterminer graphiquement les antécédents de 0 : Ce sont 2 et 10 : $f(2) = f(10) = 0$

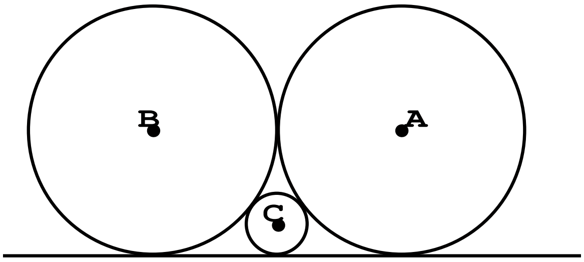
d) Factoriser $f(x)$ puis retrouver les antécédents de 0 en résolvant une équation.

$$f : x \to \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 - 4 = \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 - 2^2 = \left(\frac{x}{2} - 3 + 2\right)\left(\frac{x}{2} - 3 - 2\right) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} - 5\right)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \times 2 = 2 \\ ou \\ \frac{x}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 5 \Leftrightarrow x = 5 \times 2 = 10 \end{cases}$$

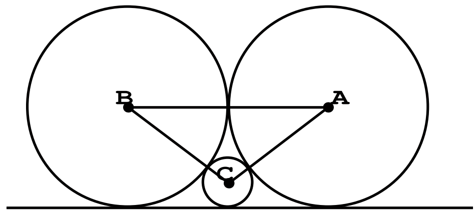
Exercice N°3 :

On considère 2 tuyaux identiques de section circulaire et de rayon R posés l'un contre l'autre sur un sol horizontal. Calculer le rayon r du plus grand tuyau que l'on peut loger dans l'espace vide entre les deux grands tuyaux et le sol.



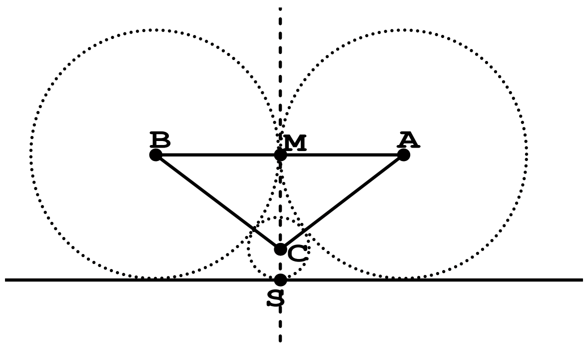
a) Considérons le triangle BAC :
On a

$BA = 2R$ et $BC = AC = R + r$



b) Considérons maintenant l'axe de symétrie de la figure :

(MS) est la médiatrice du triangle isocèle BAC.
Elle est donc perpendiculaire à (BA) : le triangle BMC est donc un triangle rectangle en M



Dans ce triangle, on a :

$BM = R$

$MC = MS - SC = R - r$

$BC = R + r$

D'après l'égalité de Pythagore :

$BC^2 = BM^2 + MC^2$

$(R + r)^2 = R^2 + (R - r)^2$

$R^2 + 2rR + r^2 = R^2 + R^2 - 2rR + r^2$

$2rR = R^2 - 2rR$

$2rR + 2rR = R^2$

$4rR = R^2$

$r = \dfrac{R^2}{4R} = \dfrac{R}{4}$

Le rayon du petit tuyau vaut le quart de celui des grands.

Pour les curieux :

Et si les deux tuyaux n'ont pas le même rayon, que vaut le rayon du plus grand tuyau pouvant être intercalé entre eux ?Voir activité complète, dernier chapitre.

Exercice N°4 : Soit n et p deux nombre entiers naturels quelconques différents de zéro avec n > p

Démontrer qu'un triangle dont les côtés mesurent n^2+p^2 ; n^2-p^2 ; $2np$ est un triangle rectangle.
Notons par ABC le triangle en question et supposons que :

$AB = n^2 + p^2$ $\quad AC = n^2 - p^2$ et $\quad BC = 2np$

Il faut vérifier si l'égalité de Pythagore est respectée par les longueurs des côtés du triangle.

Nous devons donc vérifier si le carré d'une des longueurs est égal à la somme des carrés des deux autres.

a) Calculs des carrés des longueurs :

$$AB^2 = (n^2+p^2)^2 = (n^2)^2 + 2\times n^2 \times p^2 + (p^2)^2 = n^4 + 2n^2p^2 + p^4$$
$$AC^2 = (n^2-p^2)^2 = (n^2)^2 - 2\times n^2 \times p^2 + (p^2)^2 = n^4 - 2n^2p^2 + p^4$$
$$BC^2 = (2np)^2 = 4n^2p^2$$

b) On remarque que : $\quad n^4 - 2n^2p^2 + p^4 + 4n^2p^2 = n^4 + 2n^2p^2 + p^4$,

c'est-à-dire que $\quad AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Conclusion : l'égalité de Pythagore est vérifiée par les longueurs du triangle ABC, celui-ci est donc rectangle en C.

Exercices non corrigés.

Exercice N°1 : Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ **;** $\beta \in \mathbb{N}$ **et** $d \in \mathbb{N}$ **avec :** $\alpha \geq \beta > 0$**. et** $d > 0$.

$R_\alpha =$ le reste dans la division euclidienne de α par d

$R_\beta =$ le reste dans la division euclidienne de β par d

$R =$ le reste dans la division euclidienne de $\alpha^2 - \beta^2$ par d

1. Recopie le tableau ci-dessous et complète-le.

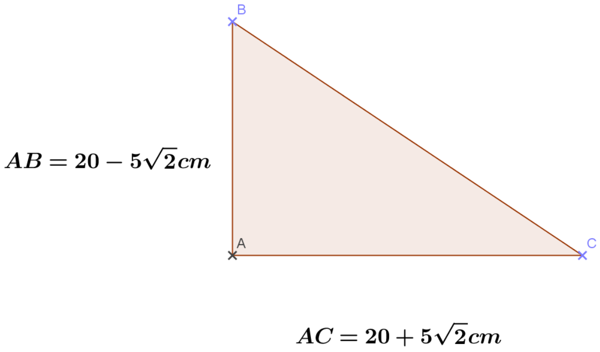
α	β	α²	β²	α²-β²	d	Rα	Rβ	R
23	16				7			
217	63				11			
53	38				15			
101	11				10			

2. Quelle hypothèse peux-tu émettre ?

3. Soit $\alpha = kd + R$ et $b = k^{'}d + R$ où $k, k^{'}, d$ et R sont 4 nombres entiers naturels différents de 0, avec $k > k^{'}$.

   Démontre que $\alpha^2 - \beta^2$ est un multiple de d.

Exercice n°2 : ABC est un triangle rectangle en A.



1. Calculer l'aire du triangle.
2. Calculer BC.
3. Calculer $\cos(\alpha)$ sous la forme $\frac{a}{b}+\frac{c\sqrt{2}}{d}$ avec a,b,c,d les plus petits possibles.
4. Donner la valeur approchée de α au degré près.
5. Calculer $\cos^2(\alpha)$ sous la forme $\frac{a}{b}+\frac{c\sqrt{2}}{d}$ avec a,b,c,d les plus petits possibles.
6. Calculer $1-\cos^2(\alpha)$ sous la forme $\frac{a}{b}+\frac{c\sqrt{2}}{d}$ avec a,b,c,d les plus petits possibles.
7. Calculer $\sin(\alpha)$ sous la forme $\frac{a}{b}+\frac{c\sqrt{2}}{d}$ avec a,b,c,d les plus petits possibles.
8. Déduire du travail précédent que $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{9}}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$. Justifier.

Exercice n°3 : On donne $F(x)=(3x-2)^2-(2x-1)^2$

1. Développer et réduire $F(x)$
2. Factoriser $F(x)$.
3. Calculer $F(\sqrt{2})$ en choisissant la plus pratique des 3 écritures de F.
4. Résoudre l'équation $F(x)=0$ à partir de la seule écriture des 3 qui permet de le faire.

Exercice n°4 :

Factoriser toutes les expressions suivantes en utilisant la bonne identité remarquable.

$a=x^2+2x-1$	$d=(3x-1)^2-1$	$g=(x+5)^2-(x-5)^2$
$b=81x^2-100$	$e=\frac{9x^2}{16}-\frac{3x}{4}+\frac{1}{4}$	$h=100y^2+40y+4$
$c=16x^2-24x+9$	$f=5x^2+2\sqrt{15}x+3$	$i=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{16}$

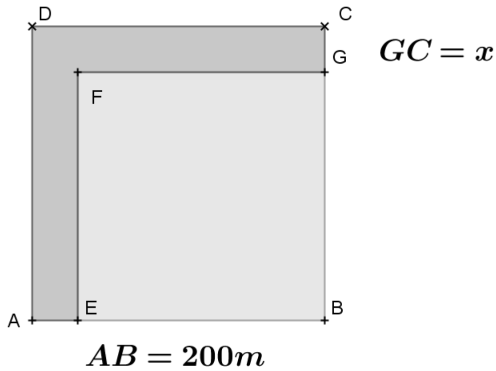
Exercice n°5 : Développer les expressions suivantes.

$a=(3x+1)^2$ $\quad$ $a=(2x-4)(2x+4)$ $\quad$ $a=(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$

$b=(3+2\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})$ $\quad$ $b=(2\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2$ $\quad$ $b=\left(7x+\frac{1}{7}\right)^2$

$c=\left(\frac{x}{3}-3\right)^2$ $\quad$ $c=\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{2}\right)^2$ $\quad$ $c=(1-2x)^2$

Exercice n°6 : Un frère et une sœur se partage un terrain carré de 200 m de côté comme indiqué sur la figure ci-contre.



On note x, en mètre, la mesure de GC.

Le frère prend le polygone ADCGFE, dont le périmètre et l'aire seront notés respectivement $P_1(x)$ et $A_1(x)$.

La sœur prend le polygone FGBE, carré de côté GB, dont le périmètre et l'aire seront notés respectivement $P_2(x)$ et $A_2(x)$.

1. Entre quelles valeurs varie x ?

2. Calcule $P_1(30); A_1(30); P_2(30); A_2(30)$, c'est-à-dire les valeurs des périmètres et aires quand $x = 30$ mètres.

3. La sœur souhaite dans un premier temps avoir un terrain de 6 400 m^2 : $A_2(x) = 6400$

   a) Que vaut alors $A_1(x)$?
   b) Que vaut x ?

4. Exprime $P_1(x); P_2(x); A_2(x)$ et $A_1(x)$ en fonction de x. Que remarques-tu concernant $P_1(x)$?
   Pour $P_2(x)$; $A_2(x)$ et $A_1(x)$, donner les formes factorisées et les formes développées.

5. Finalement, le terrain est partagé en deux lots de même aire. Que vaut alors x ? Donner la valeur exacte et l'arrondi au mètre près.

6. Les deux courbes suivantes donnent les aires des terrains en fonction de la longueur x. Répondre aux questions à l'aide des courbes.

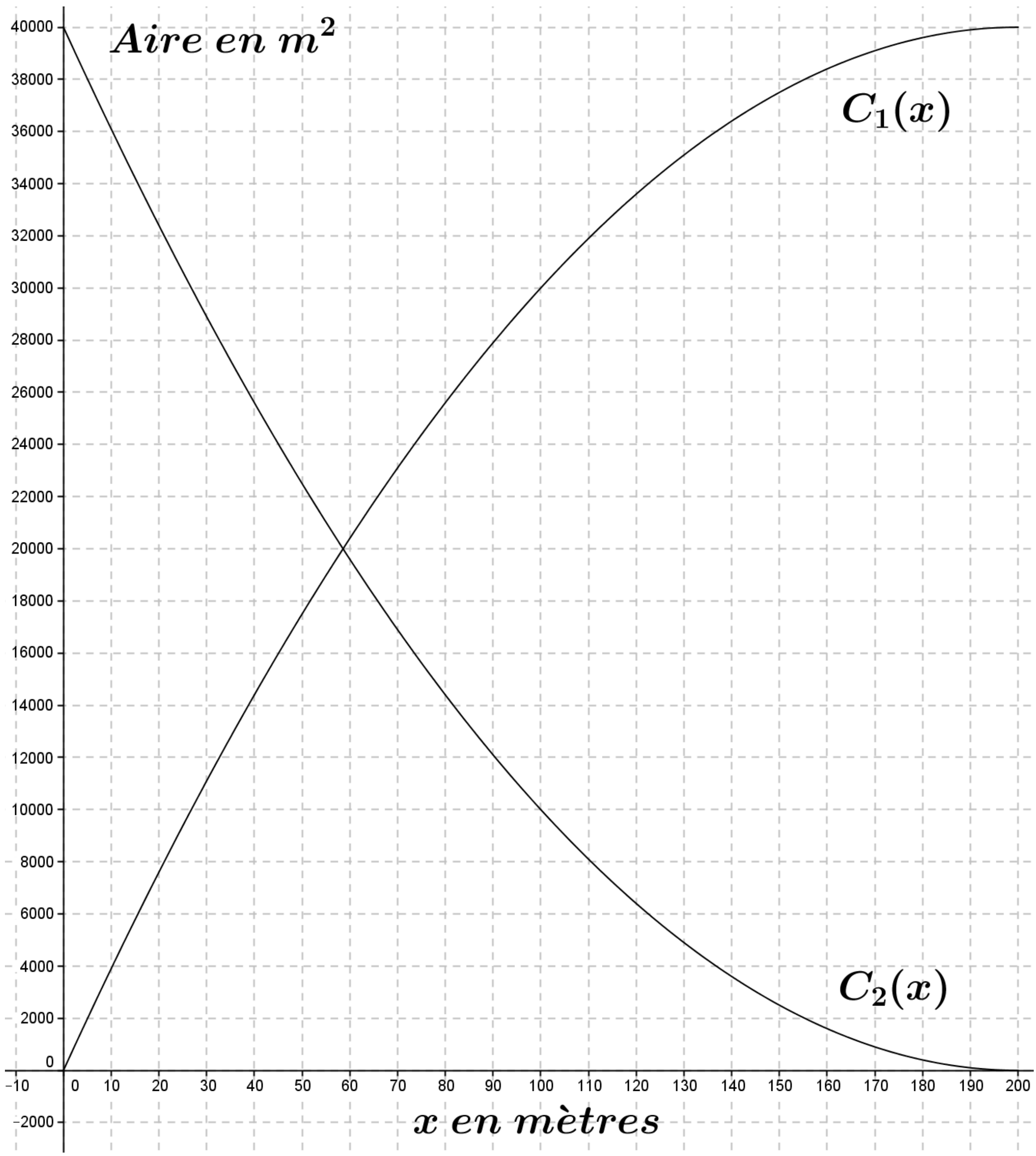
a. De $C_1(x)$ et de $C_2(x)$, quelle est celle qui donne l'aire $A_1(x)$? Quelle est celle qui donne $A_2(x)$? Justifier.

b. Que valent $A_1(x)$ et $A_2(x)$ pour $x = 100$ mètres ?

c. Que vaut $A_1(x)$ quand $A_2(x)=36000$? Que vaut alors x ?

d. Que vaut l'aire des terrains quand $A_1(x)=A_2(x)$?
Que vaut alors x ?

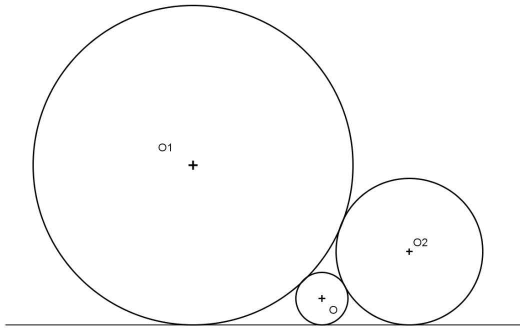
e. Les aires sont-elles proportionnelles à la longueur x ?



Activité complète : Pythagore – Racines carrées et Identités remarquables.

Quel est le rayon du petit tuyau coincé entre les deux autres ?

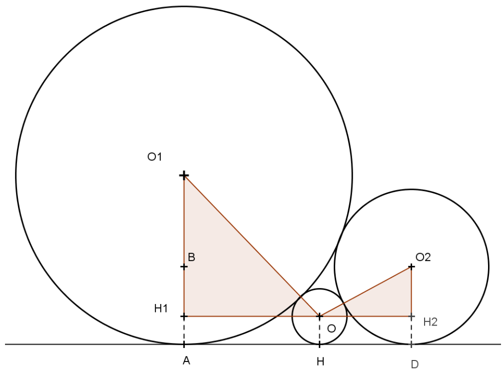
Notons ce rayon r et notons R_1 et R_2 les rayons des tuyaux dont O_1 et O_2 sont respectivement des points des axes.



1. Notons $D = OH_1$ et $d = OH_2$

$$O_1H_1 = O_1A - H_1A = R_1 - r$$
$$O_2H_2 = O_2D - H_2D = O_2D - OH = R_2 - r$$
$$O_1O = R_1 + r$$
$$O_2O = R_2 + r$$

Pythagore appliqué dans les deux triangles rectangles conduit à :

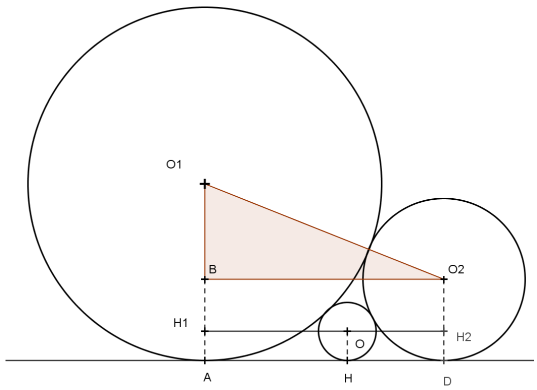


$$D^2 = OH_1^{\ 2} = (R_1 + r)^2 - (R_1 - r)^2$$
$$D^2 = (R_1 + r + R_1 - r)(R_1 + r - R_1 + r)$$
$$D^2 = 2R_1 \times 2r = 4rR_1$$
$$D = \sqrt{4rR_1} = 2\sqrt{rR_1}$$

et

$$d^2 = OH_2^{\ 2} = (R_2 + r)^2 - (R_2 - r)^2$$
$$d^2 = (R_2 + r + R_2 - r)(R_2 + r - R_2 + r)$$
$$d^2 = 2R_2 \times 2r = 4rR_2$$
$$d = \sqrt{4rR_2} = 2\sqrt{rR_2}$$

2. Dans le triangle O_1O_2B rectangle en B, on



$$O_1O_2 = R_1 + R_2$$
$$O_1B = O_1A - BA = O_1A - O_2D = R_1 - R_2$$
$$BO_2 = H_1H_2 = D + d$$

Pythagore dans ce triangle donne :

$$(R_1 + R_2)^2 = (D + d)^2 + (R_1 - R_2)^2$$

Soit : $(D + d)^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2$

3. En développant $(D+d)^2$ et en utilisant les résultats de 1) et de 2), il vient :

$$(D+d)^2 = (R_1+R_2)^2 - (R_1-R_2)^2 = D^2+d^2+2dD$$

$$(R_1+R_2+R_1-R_2)(R_1+R_2-R_1+R_2) = 4rR_1+4rR_2+2\times 2\sqrt{rR_1}\times 2\sqrt{rR_2}$$
$$2R_1\times 2R_2 = 4r(R_1+R_2)+8\sqrt{r^2R_1R_2}$$
$$4R_1R_2 = 4r(R_1+R_2)+8r\sqrt{R_1R_2}$$
$$R_1R_2 = r(R_1+R_2)+2r\sqrt{R_1R_2} = r\left(R_1+R_2+2\sqrt{R_1R_2}\right)$$

$$r = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+2\sqrt{R_1R_2}}$$

On remarque que si $R_1=R_2=R$: $r = \dfrac{R\times R}{R+R+2\sqrt{R\times R}} = \dfrac{R^2}{2R+2\sqrt{R^2}} = \dfrac{R^2}{2R+2R} = \dfrac{R^2}{4R} = \dfrac{R}{4}$

On retrouve bien le cas particulier vu dans l'exercice traité dans les pages précédentes.

4. On peut trouver une autre formule dans la littérature mathématique.

$$r = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+2\sqrt{R_1R_2}} = \frac{R_1R_2}{\sqrt{R_1}^2+\sqrt{R_2}^2+2\sqrt{R_1}\times\sqrt{R_2}} = \frac{R_1R_2}{\left(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\right)^2}$$

5. Enfin on peut trouver :

$$r = \frac{R_1R_2}{\sqrt{R_1}^2+\sqrt{R_2}^2+2\sqrt{R_1}\times\sqrt{R_2}} = \frac{R_1R_2}{\left(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\right)^2}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{\left(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\right)^2}{R_1R_2} = \frac{\left(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\right)^2}{R_1R_2}$$
$$\sqrt{\frac{1}{r}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\right)^2}{R_1R_2}} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\right)^2}}{\sqrt{R_1R_2}} = \frac{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}\times\sqrt{R_2}}$$
$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1}\times\sqrt{R_2}}+\frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}\times\sqrt{R_2}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{R_1}\times 1}{\sqrt{R_1}\times\sqrt{R_2}}+\frac{\sqrt{R_2}\times 1}{\sqrt{R_1}\times\sqrt{R_2}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}}+\frac{1}{\sqrt{R_1}}$$

Ce n'est pas une formule qui donne directement r mais une formule qui donne sobrement un lien entre $r; R_1; R_2$:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}$$