Généralités sur les fonctions.

1. Qu’est-ce qu’une fonction en mathématiques ?

a. **Imaginons le programme de calcul suivant :**

Etape n°1 : choisir un nombre.
Etape n°2 : le multiplier par 2.
Etape n°3 : ajouter alors 3.

Commençons par choisir plusieurs nombres de départ et calculons les résultats.

Etape n°1: nombre choisi.	Etape n°2:son double.	Etape n°3:le double du nombre choisi augmenté de 3.
-3	-6	**-3**
-2	-4	**-1**
-1	-2	**1**
0	0	**3**
1	2	**5**
2	4	**7**
3	6	**9**

En faisant ce travail, tu travailles sur une fonction… : tu viens même de calculer les **images** dans la fonction en question de -3 ; de -2 ; de -1 ; de 0, etc…. :

9 est l’image de 3, de même que 7 est l’image de 2, etc.

En gros, notre fonction est la description du programme de calcul : Au double d’un nombre, on ajoute 3.

b. **Tableur et fonction :** Cherchons alors à programmer une feuille de calcul pour que les calculs soient automatiques.

	A	B	C
1 2	Etape n°1: nombre choisi.	Etape n°2:son double.	Etape n°3:le double du nombre choisi augmenté de 3.
3		=2*A3	=2*A3+3
4		=2*A4	=2*A4+3
5		=2*A5	=2*A5+3
6		=2*A6	=2*A6+3
7		=2*A7	=2*A7+3

c. **Et si nous prenions le programme à l’envers ?**

Si l’étape n°3 donne 21 ; quel est le nombre de l’étape n°1 ?
Si l’étape n°3 donne 0, quel est le nombre de l’étape n°1 ?

As-tu trouvés ? Il s’agit respectivement de 9 et -1,5. Là, tu as déterminé des **antécédents** :

9 qui est l’antécédent de 21.
-1,5 qui est l’antécédent de 0.

d. Fonction et courbe représentative.

Tu sais que pour construire un point dans un plan muni dans un repère, il faut connaître deux nombres : l'abscisse du point et l'ordonnée du point.

A chaque couple (antécédent ; image) est associé un point (abscisse, ordonnée) avec :

(Abscisse = antécédent ; Ordonnée = image)

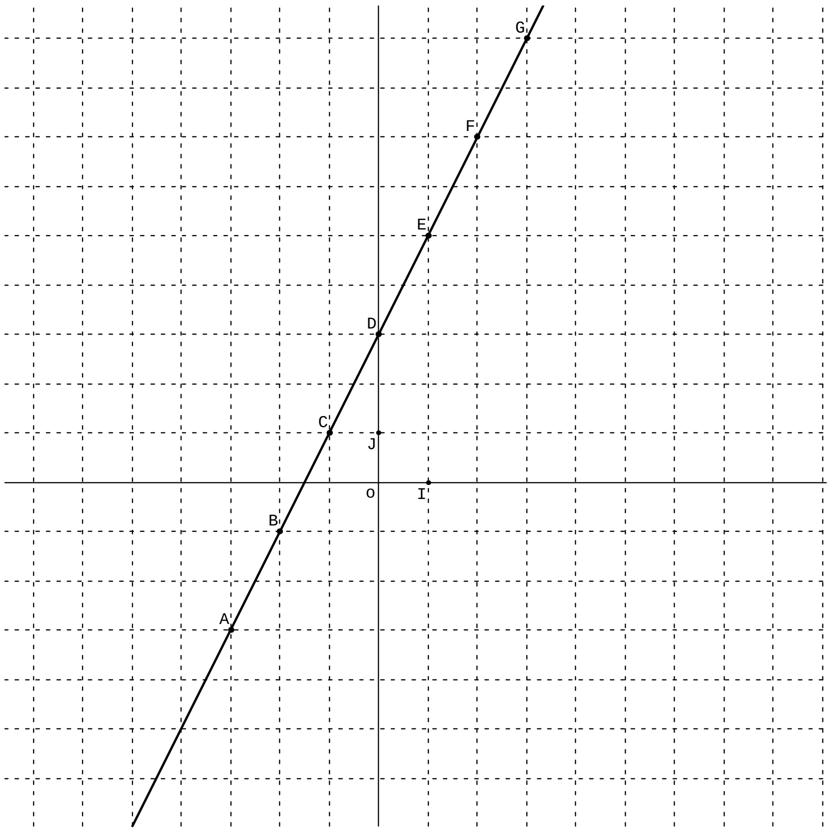
Ainsi : pour notre fonction étudiée, le tableau de départ repris-ci-dessous nous

Etape n°1: nombre choisi = **antécédent**	Etape n°2:son double.	Etape n°3:le double du nombre choisi augmenté de 3 = **image**
-3	-6	-3
-2	-4	-1
-1	-2	1
0	0	3
1	2	5
2	4	7
3	6	9

permet de trouver 7 points correspondant à la fonction :

abscisse= antécédent	Ordonnée = Image	Coordonnées des points
-3	-3	A :(-3 ; - 3)
-2	-1	B: (- 2 ; - 1)
-1	1	C: (- 1 ; 1)
0	3	D: (0 ; 3)
1	5	E : (1 ; 5)
2	7	F : (2 ; 7)
3	9	G : (3 ; 9)

que nous plaçons maintenant dans le plan comme dans la figure ci-dessous.



En calculant les images de beaucoup d'antécédents, nous obtiendrions beaucoup de points.

En reliant ces points, nous obtenons une courbe : **la courbe représentative de la fonction étudiée.**

Dans notre cas, la courbe obtenue est une droite.

e. <u>Définition algébrique d'une fonction :</u>

Définir de manière algébrique une fonction correspond à lui faire sa carte d'identité mathématique.

Pour cela : **il faut donner un nom à la fonction**, qui est, rappelons-le, un genre de programme de calcul qui à un nombre de départ, l'antécédent, lui associe un nombre d'arrivée, l'image.

La plupart du temps, une fonction a comme nom **une simple lettre** : $f, g, h, etc...$

Appelons notre fonction la fonction f.

Pour la définir d'un point de vue mathématique, reportons-nous à la feuille de calcul sous tableur.

	A	B	C
1	Etape n°1: nombre choisi.	Etape n°2:son double.	Etape n°3:le double du nombre choisi augmenté de 3.
2			
3		=2*A3	=2*A3+3
4		=2*A4	=2*A4+3
5		=2*A5	=2*A5+3
6		=2*A6	=2*A6+3
7		=2*A7	=2*A7+3

Notons par x le nombre de départ au lieu de le repérer par les références de la cellule qui le contient.

	A	B	C
1	Antécédent.	Etape n°2:son double.	Image.
2			
3		=2*A3	=2*A3+3
4	x	2x	2x+3

Ainsi, notre fonction, notée f, associe à un nombre x son double augmenté de trois, qui se calcule en faisant $2x+3$.

On résume le tout de la manière suivante : $f : x \rightarrow 2x+3$

Pour écrire plus rapidement l'image de x par la fonction f, nous écrirons : $f(x)$ qui se lit « f de x ».

Comme ici l'image de x est égale à $2x+3$, nous avons donc : $f(x) = 2x+3$.

De même : l'image de 2 se note $f(2)$ et se lit « f de 2 », avec $f(2) = 2\times2+3 = 4+3 = 7$

f. <u>Equation de la courbe représentative d'une fonction.</u>

Rappelons-nous que tout point de la courbe représentative d'une fonction a un couple de coordonnées de la forme : **(Abscisse = antécédent ; Ordonnée = image)**

Pour notre fonction f, on peut donc dire que tout point de la courbe a un couple de coordonnées de la forme : $\left(x; f(x)\right) = (x; 2x+3)$

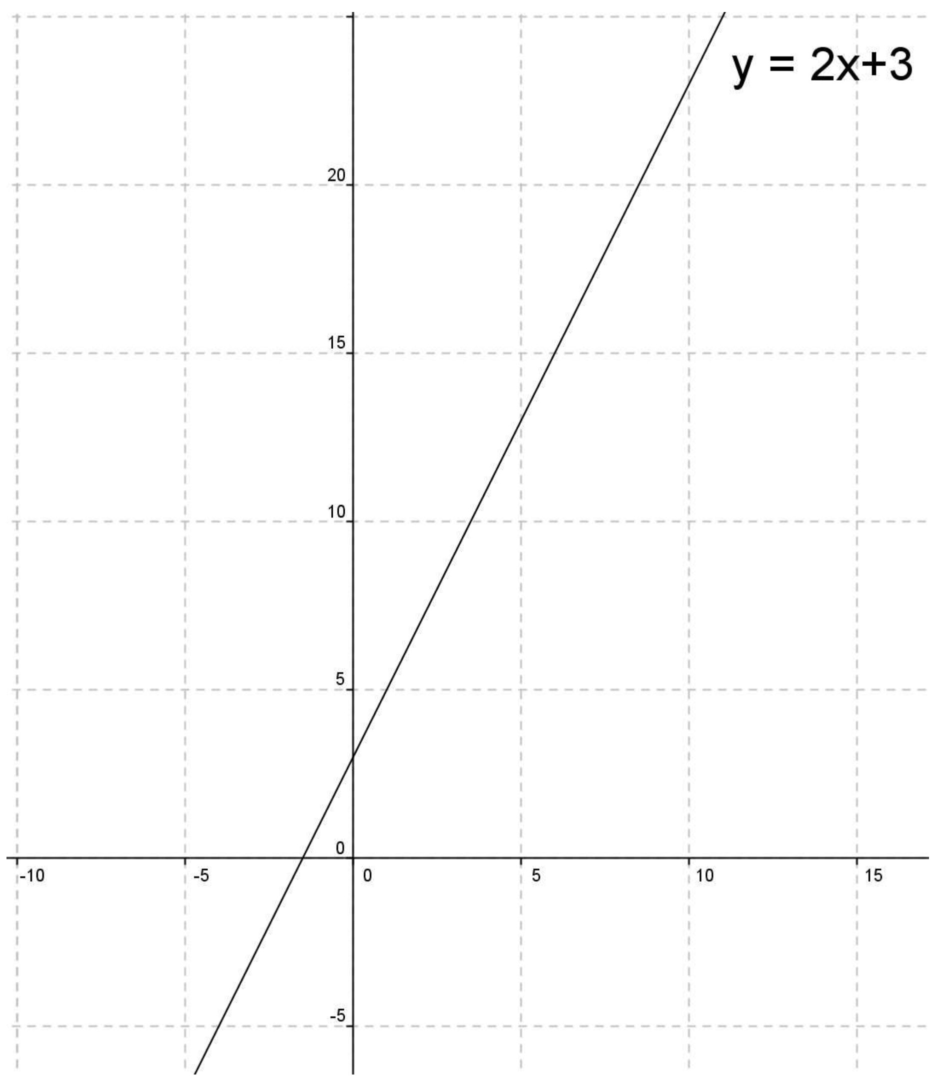
Mais tu sais que l'axe des abscisses est « l'axe des x » et que l'axe des ordonnées est « l'axe des y ».

Conclusion : tout point M de la courbe représentative de la fonction f est tel que son ordonnée y est égale à l'image de son abscisse x, soit $y = f(x)$.

Cette relation $y = f(x)$ est l'équation de la courbe représentative de la fonction f.

Pour notre fonction f, nous avons donc : $y = 2x+3$

Nous l'écrirons dans le repère où la courbe est tracée, à une de ses extrémités.



g. Appartenence d'un point $M(x;y)$ à la courbe représentative de la fonction f.

Pour qu'un point M (x, y) appartienne à C, la courbe représentative de la fonction f, il faut que son ordonnée y soit l'image de son abscisse x.

$$M(x,y)\in C \Leftrightarrow y = f(x).$$

Exemple 1 : Le point $P(6,5;18)$ est-il un point de C, courbe représentative de la fonction f ?

$P(6,5;18)\in C \Leftrightarrow 18 = f(6,5)$. Il n'y a donc qu'à vérifier si $f(6,5)=18$.

$f : x \to 2x+3$

$f(6,5) = 2\times 6,5+3 = 13+3 = 16$

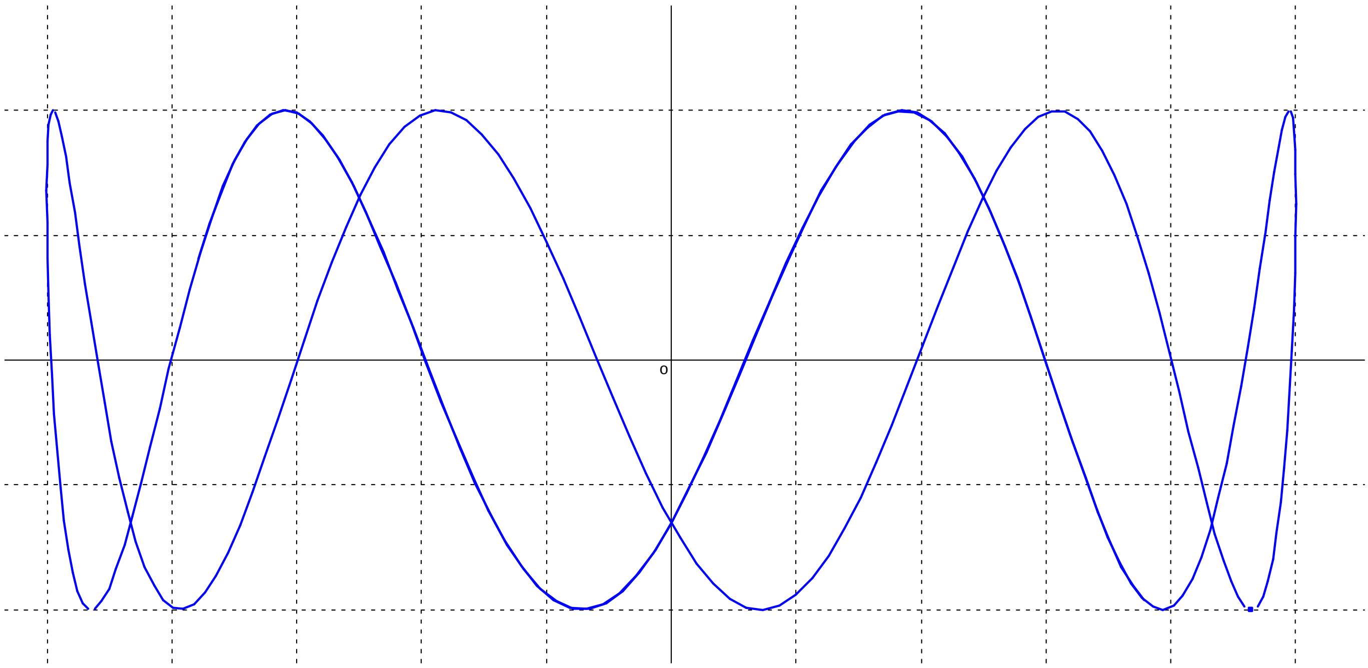
Comme $16 \neq 18$: $P(6,5;18)\notin C$.

Exemple 2 : $M\left(-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ est-il un point de la courbe représentative de notre fonction f ?

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}\times 2+3 = -\frac{4}{3}+3 = -\frac{4}{3}+\frac{9}{3} = \frac{-4+9}{3} = \frac{5}{3}$$

Comme l'image de l'abscisse de M est égale à l'ordonnée de M, M est un point de la courbe.

Une jolie courbe dite « courbe de Lissajous ».



h. Lecture graphique :

Tu auras comme travail de trouver l'image de tel nombre ou alors de trouver l'antécédent (voire **les** antécédents) de tel nombre. C'est très simple !

- ## Pour trouver graphiquement l'image d'un nombre :

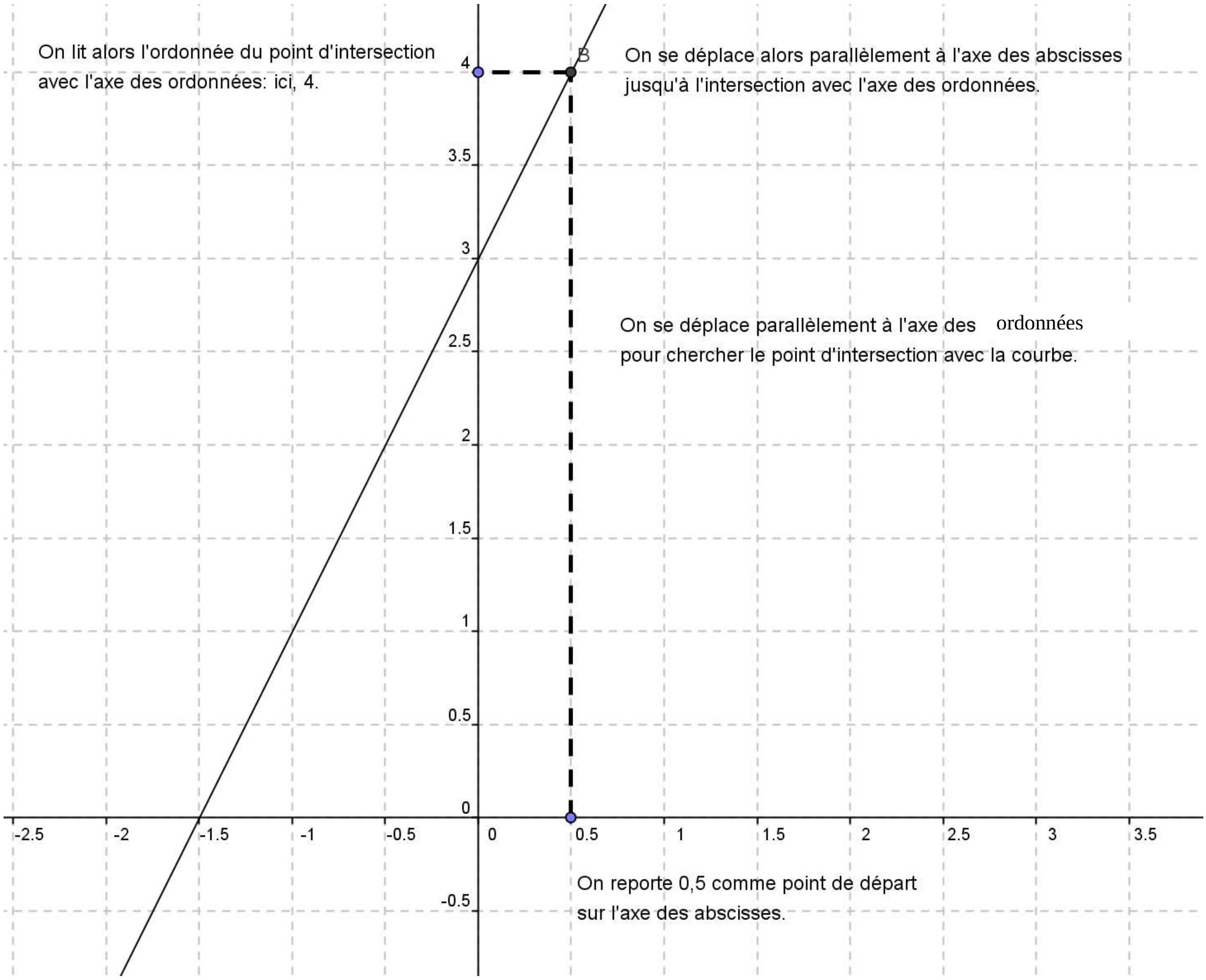
Si tu dois trouver l'image d'un nombre, c'est que celui-ci est obligatoirement l'antécédent, donc il joue le rôle d'abscisse.

1) Tu dois donc commencer par repérer cette valeur sur l'axe des abscisses.

2) Tu te déplaces alors parallèlement à l'axe des ordonnées jusqu'à chercher le point d'intersection avec la courbe.

3) Tu te déplaces alors parallèlement à l'axe des abscisses pour aller à l'intersection avec l'axe des ordonnées et tu lis l'ordonnée : cette ordonnée est la valeur attendue.

Exemple : Retrouvons graphiquement l'image de 0,5 par la fonction f **.**



L'image de 0,5 par la fonction f **est égale à 4.**

- **Pour retrouver graphiquement l'antécédent d'un point :**

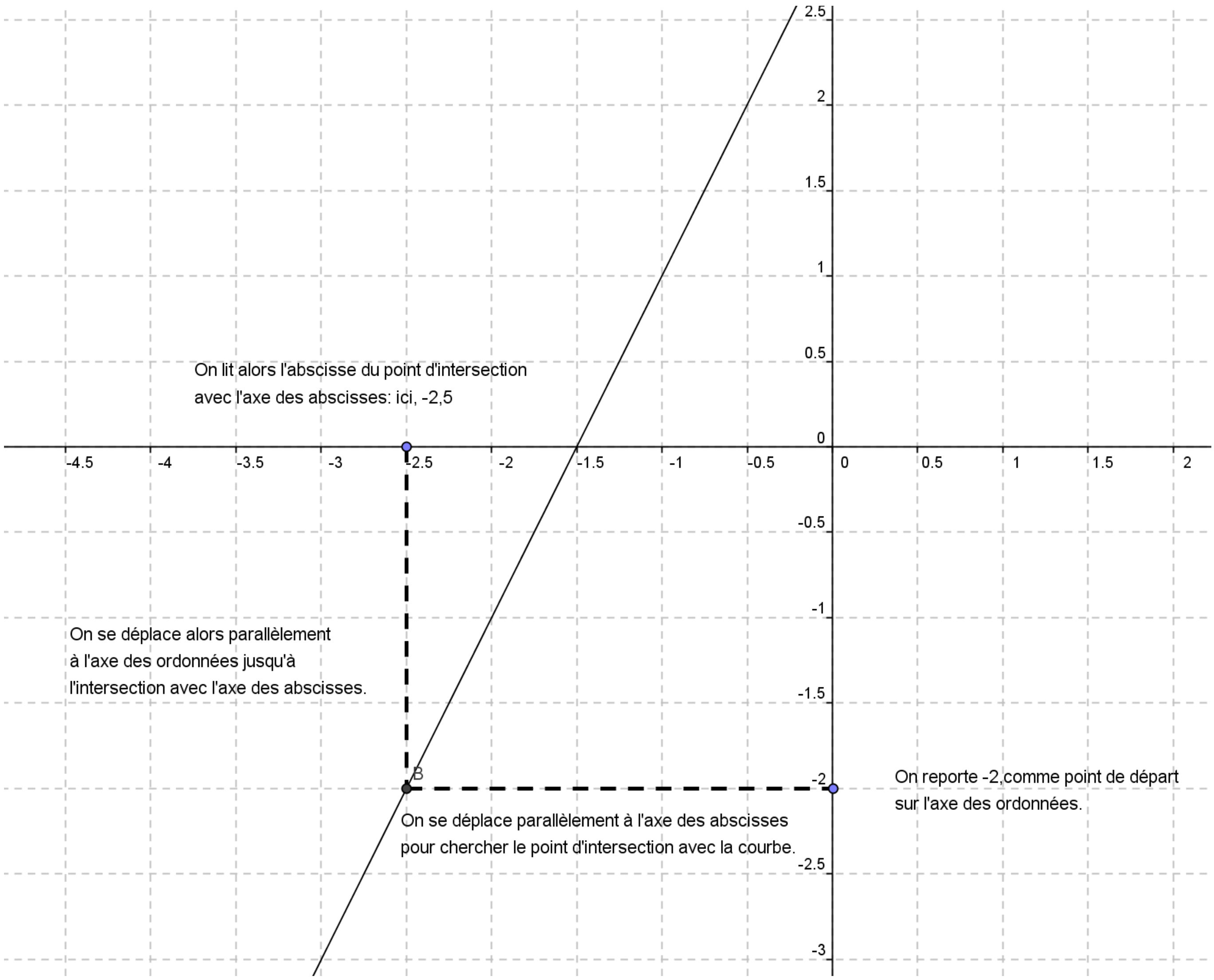
Si tu dois trouver l'antécédent d'un nombre, c'est que celui-ci est obligatoirement l'image, donc il joue le rôle d'ordonnée.

1) Tu dois donc commencer par repérer cette valeur sur l'axe des ordonnées.

2) Tu te déplaces alors parallèlement à l'axe des abscisses jusqu'à chercher le point d'intersection avec la courbe.

3) Tu te déplaces alors parallèlement à l'axe des ordonnées pour aller à l'intersection avec l'axe des abscisses et tu lis l'abscisse : cette abscisse est la valeur attendue.

<u>Exemple : Retrouvons graphiquement l'antécédent de -2 dans la fonction</u> f **.**



L'antécédent de -2 dans la fonction f **est égal à -2,5.**

i. **<u>Fonction et résolution d'équation.</u>**

Te voilà armé(e) pour aborder sereinement les fonctions. Juste un dernier point…

Reprenons le travail précédent, à savoir retrouver des images et des antécédents.

Nous venons de voir qu'il est possible de le faire graphiquement. Mais voir n'est pas synonyme de démontrer, et seul un raisonnement permet d'affirmer sans aucun doute un résultat.

Le travail graphique se trouve confirmé par les activités numériques suivantes :

- **Trouver une image correspond à calculer $f(x)$ connaissant x.**

Ainsi, trouver l'image de 0,5 correspond à calculer $f(0,5)$.
$f(0,5) = 2\times 0,5+3=1+3=4$

On retrouve bien la valeur 4 déterminée graphiquement.

- **Trouver un antécédent correspond à résoudre une équation !**

Trouver l'antécédent de -2, c'est trouver le nombre dont l'image vaut 2. Puisque les antécédents sont les variables x, le problème est de trouver x tel que :

$$f(x) = -2$$

Comme notre fonction f est la suivante : $f : x \to 2x+3$, le problème se résume à résoudre l'équation :

$$2x+3=-2$$

$$2x=-2-3$$
$$2x=-5$$
$$x=-\frac{5}{2}=-2,5$$

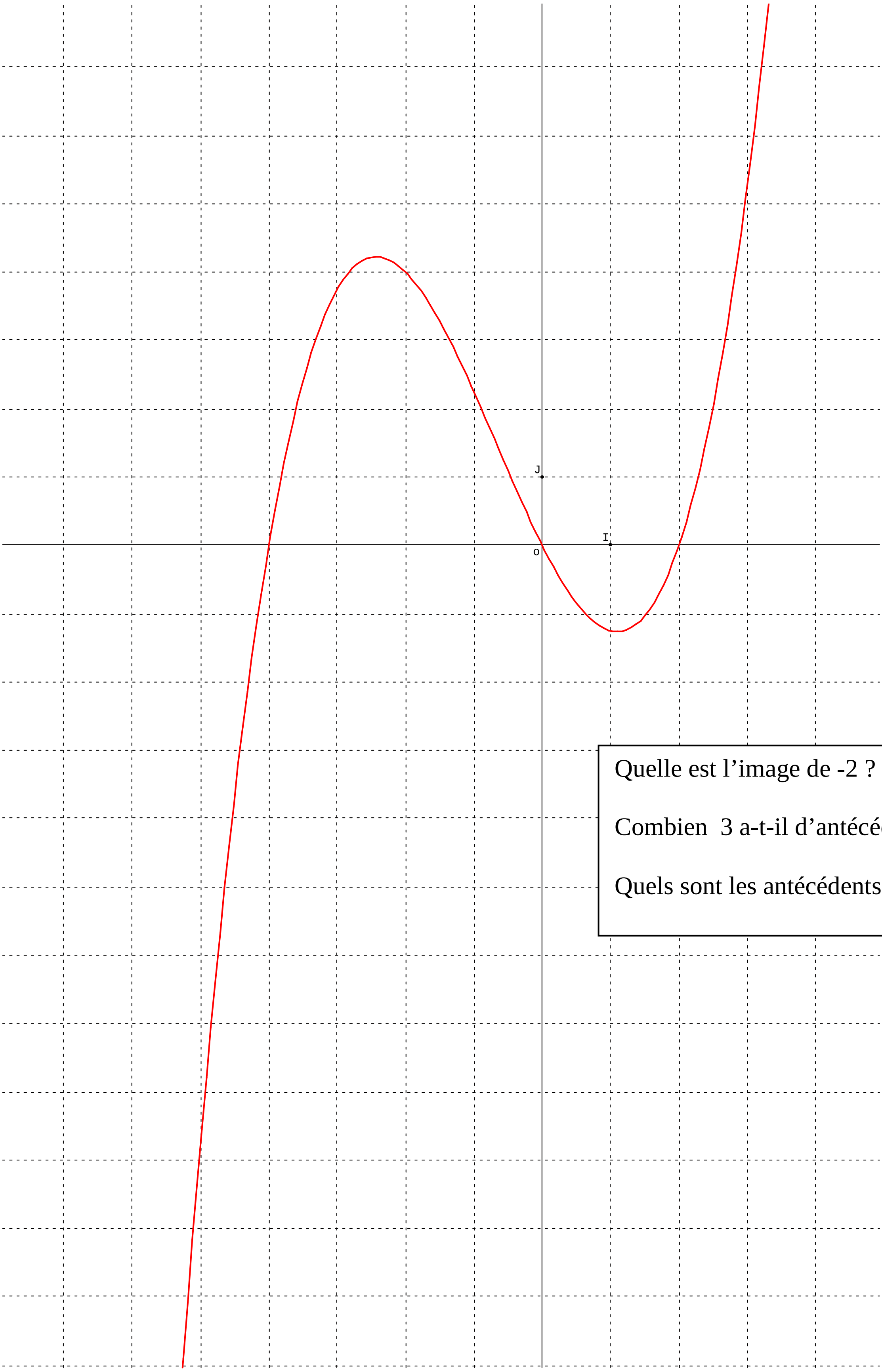
Nous retrouvons bien la même valeur que par détermination graphique.

2. Exemple N°2.

Dans cet exemple, nous ne donnons pas maintenant la définition algébrique de la fonction mais uniquement son nom et sa courbe représentative.

Cette fonction s'appelle g . Sa courbe représentative est celle figurant ci-dessous.

a. Recherche d'images et d'antécédents.



Quelle est l'image de -2 ?

Combien 3 a-t-il d'antécédents ?

Quels sont les antécédents de 0 ?

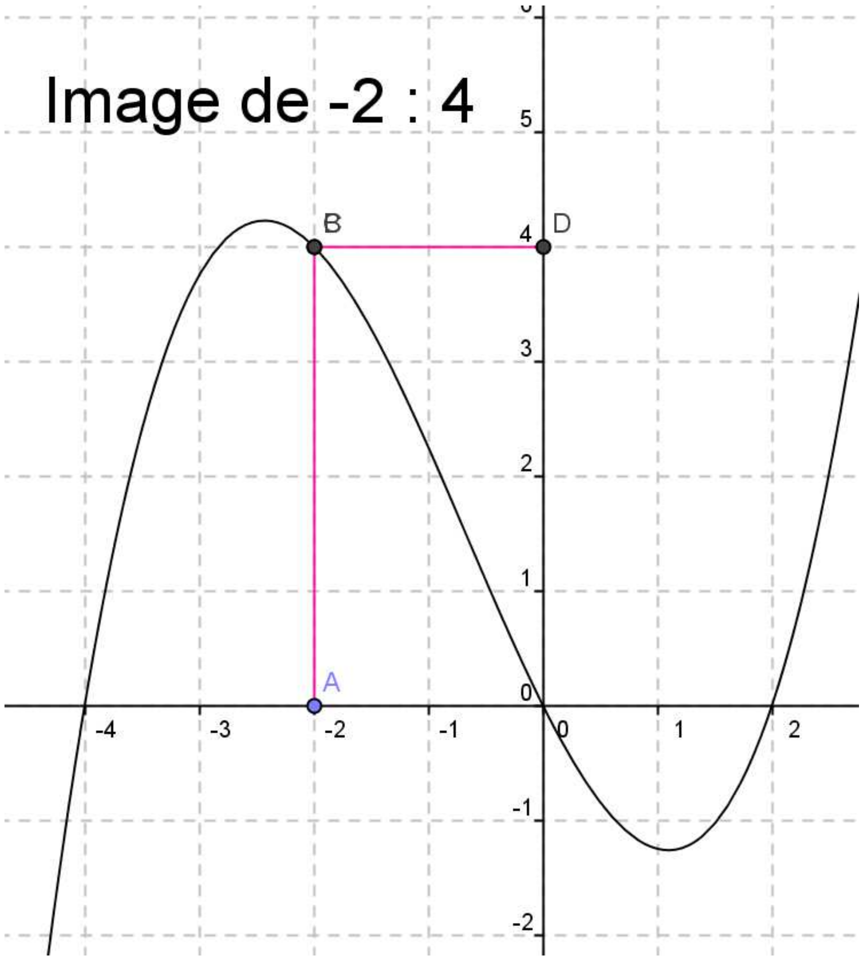
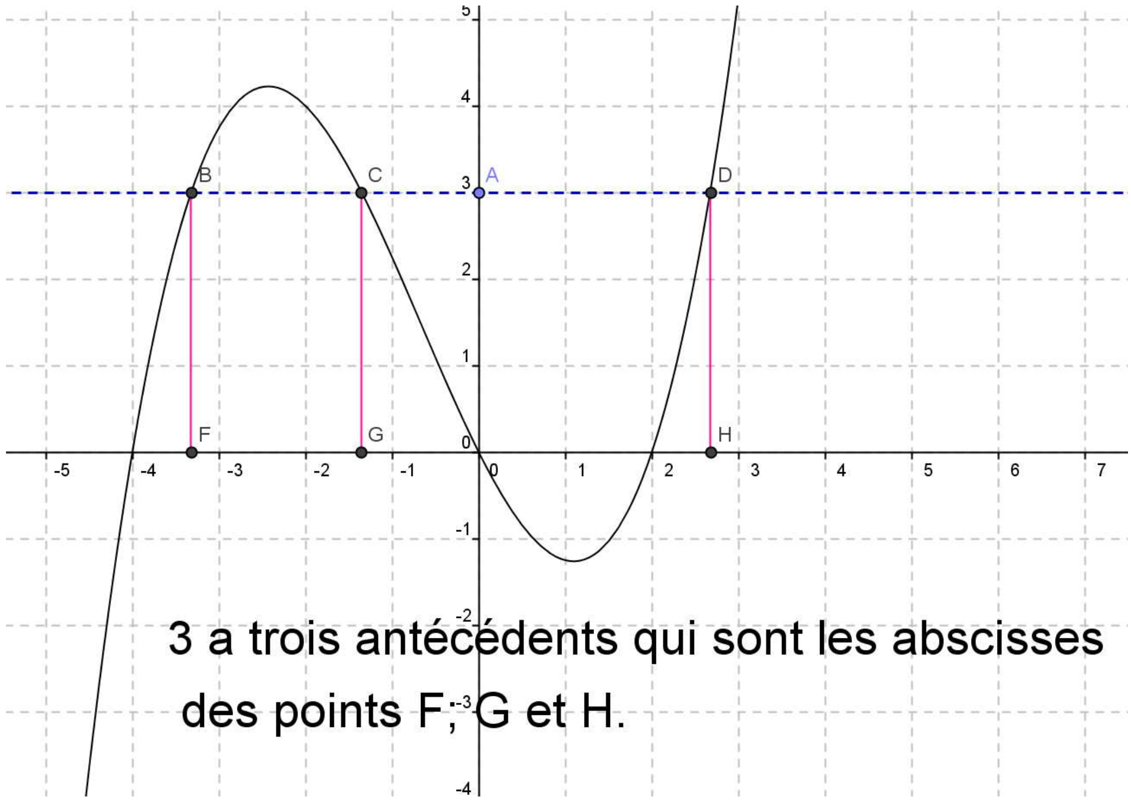
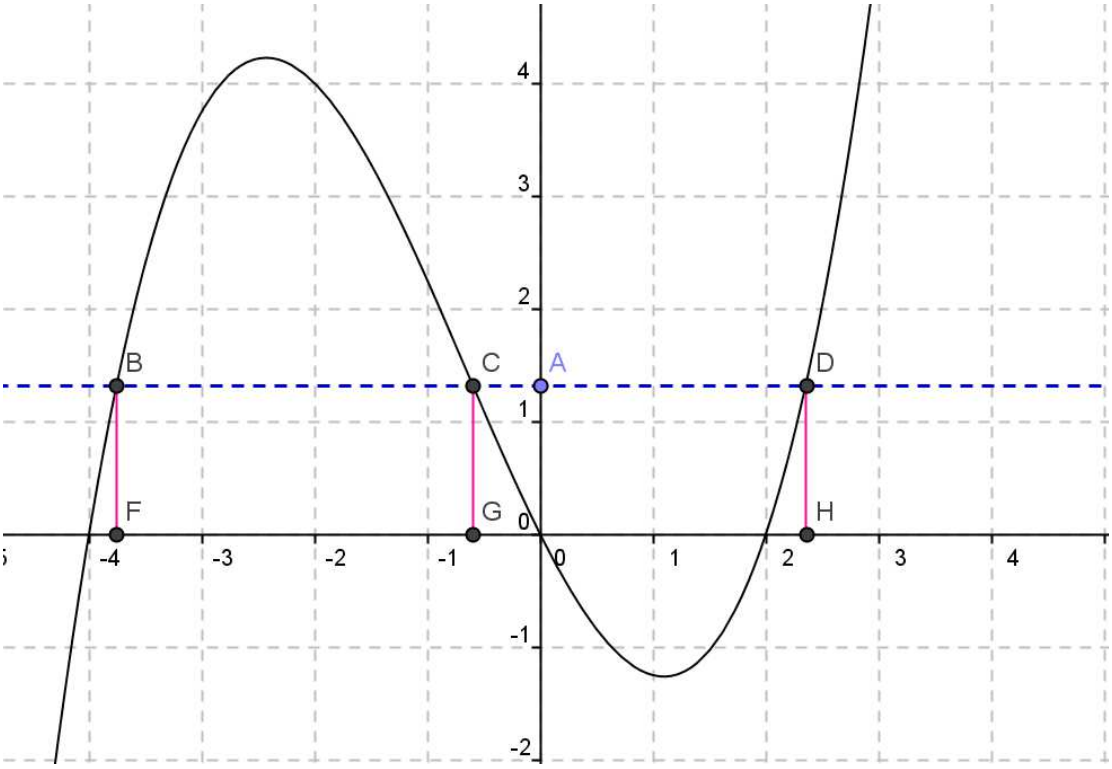


Image de -2 : 4
B
D
A


B
C
A
D
F
G
H
3 a trois antécédents qui sont les abscisses
des points F; G et H.

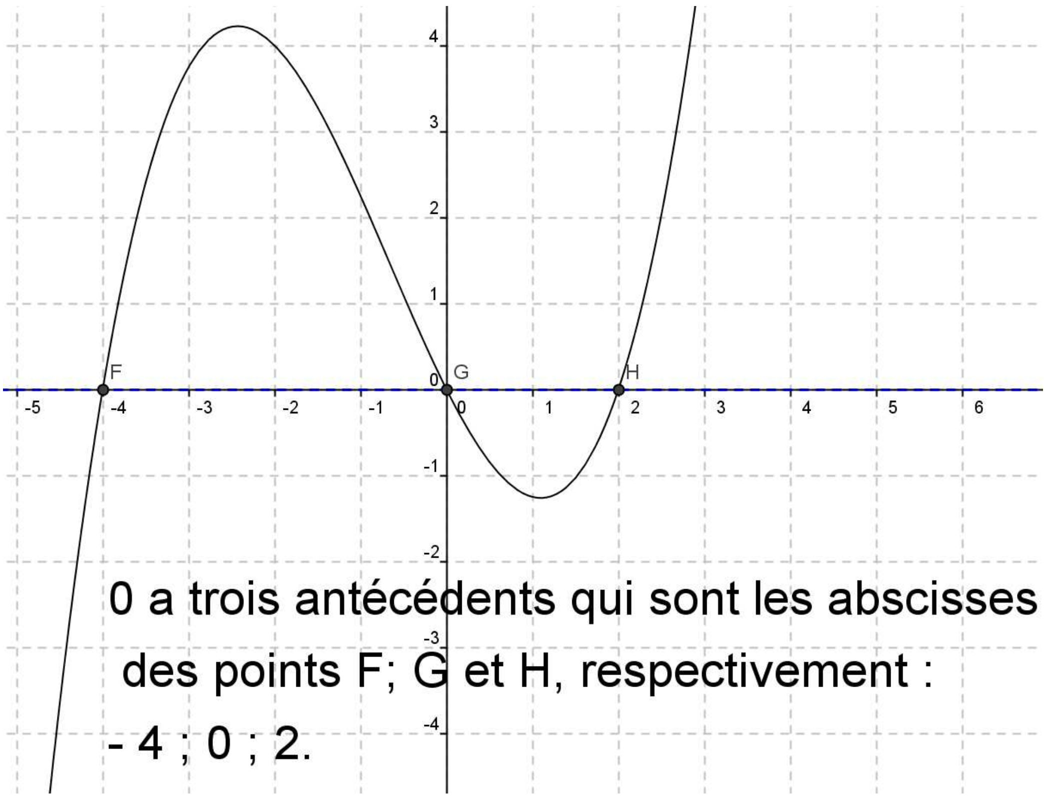
Pour avoir les antécédents de 0 : on procède comme pour les antécédents de trois : on fait « descendre » le point A, qui au départ était sur l'ordonnée $y = 3$.



jusqu'à ce qu'il soit à l'ordonnée $y = 0$.

On constate alors que la droite en pointillés bleus est confondue avec l'axe des abscisses.

Les antécédents de 0 sont au nombre de 3, ce sont les abscisses des points d'intersections de la courbe avec l'axe des abscisses.



b. <u>Si tu tiens à le savoir, la fonction g est la suivante :</u>

$$g : x \to x\left(\frac{x}{2}+2\right)\left(\frac{x}{2}-1\right).$$

On peut ainsi vérifier que l'image de -2 est bien égale à 4.

$$g(-2) = -2\times\left(\frac{-2}{2}+2\right)\times\left(\frac{-2}{2}-1\right) = -2\times(-1+2)\times(-1-1) = -2\times1\times(-2) = 4$$

On peut aussi contrôler que -4 ; 0 et 2 sont bien des antécédents de 0, c'est-à-dire que les images de -4 ; de 0 et de 2 sont bien égales à 0.

$$g(-4) = -4\times\left(\frac{-4}{2}+2\right)\times\left(\frac{-4}{2}-1\right) = -4\times(-2+2)\times(-2-1) = -4\times0\times(-3) = 0$$

$$g(0) = 0\times\left(\frac{0}{2}+2\right)\times\left(\frac{0}{2}-1\right) = 0\times2\times(-1) = 0$$

$$g(2) = 2\times\left(\frac{2}{2}+2\right)\times\left(\frac{2}{2}-1\right) = 2\times(1+2)\times(1-1) = 2\times3\times0 = 0.$$

Pour être sûr que les antécédents de 0 sont bien ceux-ci et qu'il n'en manque aucun, il faudrait résoudre l'équation :

$$x\left(\frac{x}{2}+2\right)\left(\frac{x}{2}-1\right) = 0$$

Or : pour annuler un produit, il faut annuler chacun de ses facteurs.
Comme il y a trois facteurs, nous avons trois étapes dans la résolution de notre équation :

1) $x = 0$. Solution simple à trouver.

2) $\frac{x}{2}+2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -2 \Leftrightarrow x = -2\times2 = -4$

3) $\frac{x}{2}-1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1\times2 = 2$

On a bien retrouvé par le calcul les trois valeurs telles que $g(x) = 0$, c'est-à-dire les antécédents de 0.

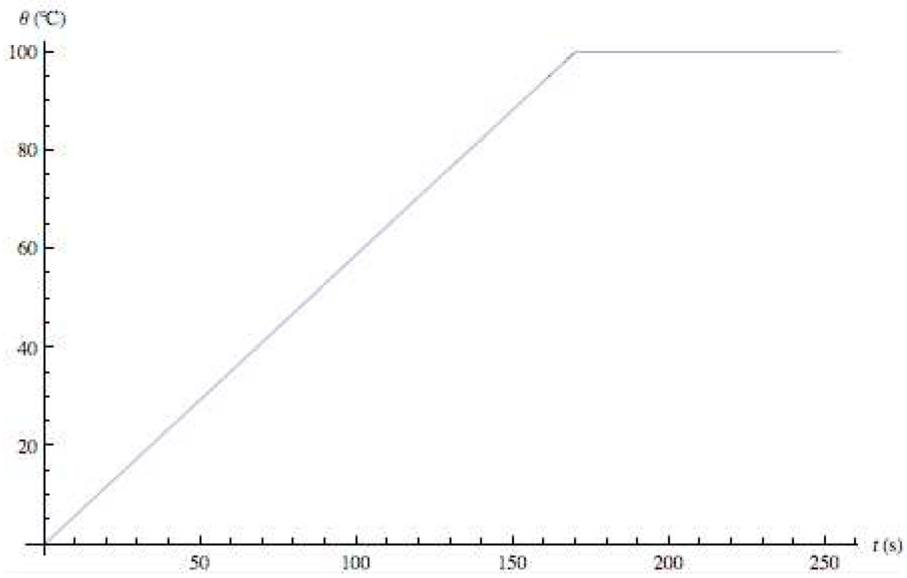
3. Exemple n°3 : un petit tour en cuisine et en physique-chimie.

a. **Sais-tu pourquoi les aliments cuisent plus vite dans une cocotte-minute ? Parce que l'eau y entre en ébullition non-pas à 100°C mais à une température plus grande.**

Et comme la durée de cuisson diminue quand la T° augmente, le temps de cuisson diminue.

Pourtant, tu as vu en cours de 5ème que l'eau entre en ébullition à une T° de 100° C, et qu'une fois cette T° atteinte, elle n'augmentait plus.

Pour mémoire, voici le type de courbe que tu as certainement tracée…



Lien avec les généralités sur les fonctions :

- Quelle est la T° de l'eau au bout de 100 s ? Elle est de 60° C
  Tu as cherché graphiquement l'image de 60 s dans la fonction mathématique qui modélise le phénomène physique de l'augmentation de la T° de l'eau en fonction du temps.

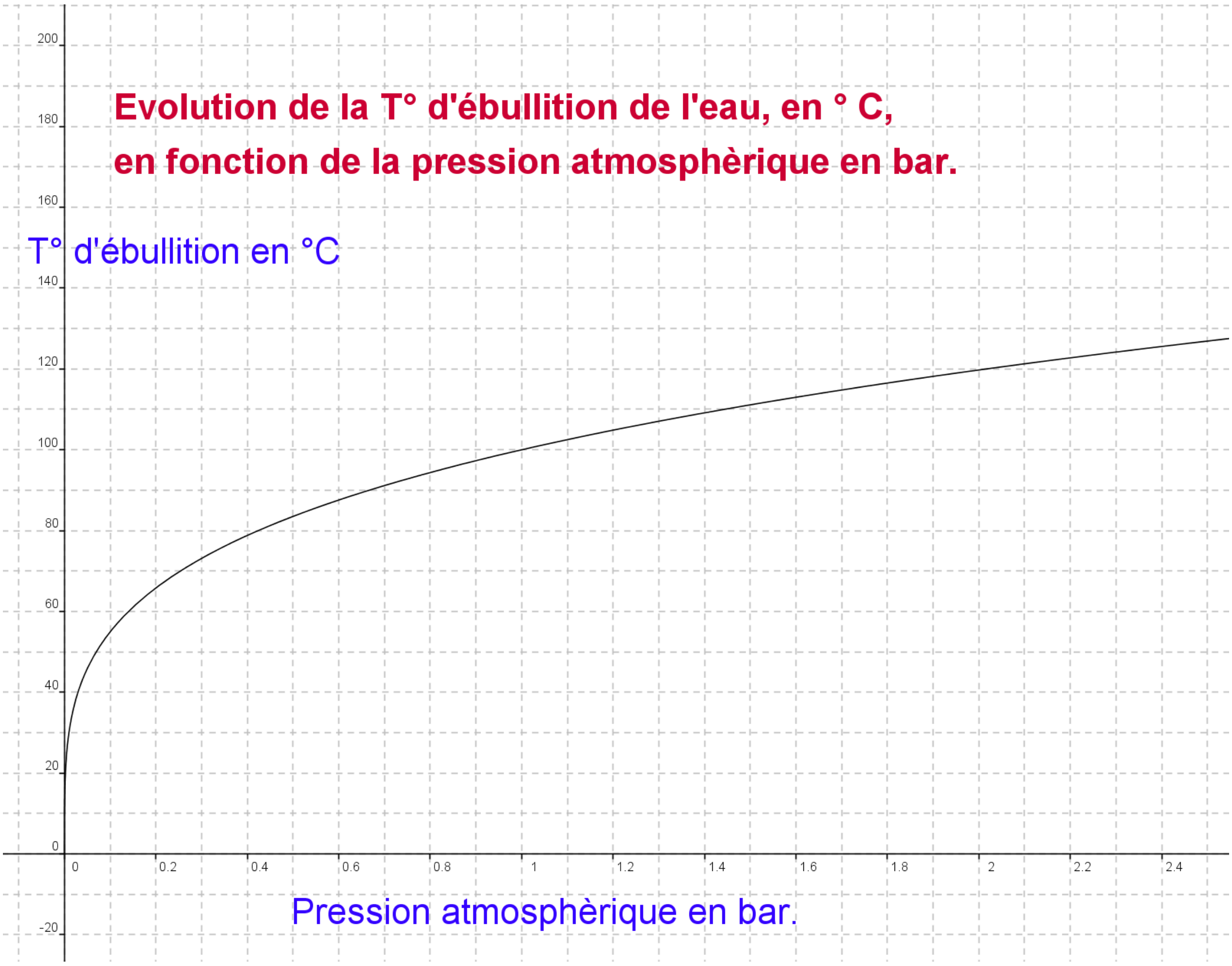
- Que ce passe-t-il au bout de 170°s ?
  La température atteint un pallier et vaut toujours 100° C. Tu as appris en 5ème que tant qu'il y a de l'eau liquide à évaporer, la T° reste égale à 100° C.

  En terme de vocabulaire image / antécédent :

  - **Les valeurs supérieures à 100 ° C n'ont pas d'antécédents.**
  - **Toutes les valeurs de temps supérieures ou égales à 170 s sont des antécédents de 100°C.**

Mais comment l'eau peut-elle alors entrer en ébullition à une T° supérieure à 100 °C ?

b. Et la pression dans tout cela !



Elle joue un rôle très important : et voici ci-dessous la courbe qui donne l'évolution de la T° d'ébullition de l'eau en fonction de la pression atmosphérique.

Une pression atmosphèrique de 1 bar est une pression atmosphèrique normale.

On voit que la T° d'ébullition de l'eau augmente avec la pression.

Comme le couvercle de la cocotte empêche la vapeur d'eau de s'évacuer, la pression dans la cocotte augmente et la T° d'ébullition en fait autant, les aliments cuisent alors plusd vite.

(La valve de sécurité empêche d'atteindre des pressions trop importantes. On a déjà vu des accidents de cocottes-minute qui ont explosé !)

- La T° d'ébullition dans une cocotte-minute est d'environ 120°C. Quelle est la pression dans la cocotte-minute ? Il s'agit de trouver l'antécédent de 120 ° C.

- La pression baisse avec l'altitude : elle n'est plus que de 0,5 bar au sommet du mont-Blanc. A quelle T° l'eau entre-t-elle en ébullition au sommet du mont-Blanc ?
  Il s'agit de trouver l'image de 0,5 bar.

- Et au sommet de l'Everest, elle entrerait en ébullition à 72° C. Quelle est la pression atmosphèrique sur le toit du monde ?

- *Pour les curieux qui veulent la fonction :* $f : x \to 100x^{0,26}$.